

## Wo wird das Bild einer unter Wasser liegenden Münze gesehen?

Thomas Quick, Johannes Grebe-Ellis

Bergische Universität Wuppertal  
Physik und ihre Didaktik, Gaußstr.20, 42119 Wuppertal  
[quick@uni-wuppertal.de](mailto:quick@uni-wuppertal.de), [grebe-ellis@uni-wuppertal.de](mailto:grebe-ellis@uni-wuppertal.de)

### Kurzfassung

Ein Blick in Schul- und Lehrbücher der Optik zeigt, dass es unterschiedliche und oft auch fehlerhafte Darstellungen darüber gibt, wo das gehobene Bild eines unter Wasser liegenden Objekts gesehen wird. Physikalisch ergeben sich im Grenzfall einer punktförmigen Pupille zwei Bildpunkte desselben Objektpunkts: Das Bild ist astigmatisch. Während das sagittale Bild senkrecht über dem Objektpunkt gesehen wird, würde das meridionale Bild dem Beobachter gleichzeitig entgegen gerückt erscheinen. Dies steht im Widerspruch zu monokularen Beobachtungen, bei denen das gehobene Bild ausschließlich senkrecht über dem zugehörigen Objekt gesehen wird. Nach einer Diskussion verschiedener Darstellungen zum Thema wird ein Experiment vorgestellt, bei dem die Separation der Bildpunkte im Zentimeterbereich mit einem Mikroskop gelingt. Den Abschluss bildet eine Überlegung zur unterschiedlichen Helligkeit der Bilder.

### 1. Einleitung

Als Einstieg in das Thema Lichtbrechung wird gelegentlich der folgende Freihandversuch verwendet: Auf dem Boden einer leeren Tasse liegt eine Münze. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, so in die Tasse zu blicken, dass die Münze gerade nicht zu sehen ist. Nun wird die Tasse gefüllt: Mit steigendem Wasserstand werden Teile der Münze sichtbar, bis schließlich die ganze Münze ins Blickfeld gehoben erscheint.

Dass sich unter Wasser liegende Gegenstände optisch verformen, sichtbare und tastbare Lage auseinander fallen, ist aus vielen Alltagssituationen bekannt: Der wassergefüllte Nudeltopf täuscht eine unvermutet geringe Tiefe vor; das Schwimmbecken scheint mit zunehmenden Abstand vom Beobachter flacher zu werden, obwohl es überall dieselbe Tiefe besitzt (Abb. 1). Das Sehphänomen der *optischen Hebung* begegnet uns überall dort, wo der Blick durch die Grenzfläche zu optisch dichteren Medien fällt.

Wodurch sich der eingangs beschriebene Versuch aber im Besonderen auszeichnet, ist die Frage, die er dem Beobachter nahe legt: An welchem geometrischen Ort wird die Münze gesehen?<sup>1</sup> So unmissverständlich diese Frage ist, so wenig gibt es derzeit eine eindeutige und physikalisch zufriedenstellende Antwort darauf. Vielmehr zeigt eine Sichtung einschlägiger Fachliteratur, dass in der Frage nach dem gesehenen Ort des Bildes im Wesentlichen zwei verschiedene, physikalisch begründbare Standpunkte vertreten werden: die *sagittale* und die *meridionale* Hebung (Abb. 2). Im Fall der sagittalen Hebung liegt das Bild senkrecht über dem Objektpunkt; ausgedehnte Körper werden danach nur in vertikaler Richtung angehoben und zudem gestaucht (vgl. z.B.

[1], [2]). Bei der meridionalen Hebung ist der Bildpunkt dem Beobachter zusätzlich entgegenrückt und liegt auf der Diakaustik des zugehörigen Objektpunktes. Dadurch erfahren ausgedehnte Körper außerdem eine Verzerrung in horizontale Richtung (vgl. z.B. [3], [4]).



Abb. 1: Die optische Hebung eines Beckenbodens wird mit flacherem Aufblickwinkel stärker. Zu den Füßen des Beobachters scheint das Becken am tiefsten zu sein. Foto von U. Backhaus.

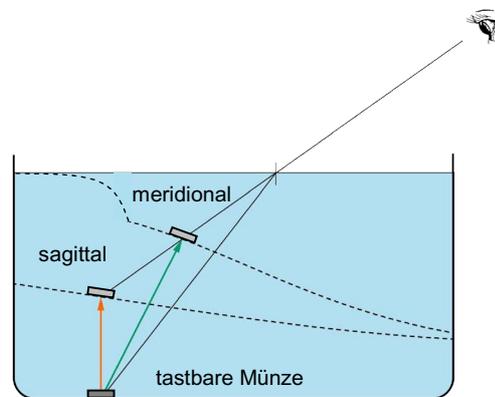


Abb. 2: Die sagittale Hebung erfolgt senkrecht zur Grenzfläche, so dass die gesehene Münze direkt über der tastbaren liegt (orange). Bei der meridionalen Hebung rückt die gesehene Münze zusätzlich auf den Beobachter zu (grün).

<sup>1</sup> Hier und im Folgenden wird die Diskussion für den Fall des monokularen Sehens bei optisch dichteren Medien mit ebener Grenzfläche geführt. Aspekte des binokularen Sehens werden an gegebener Stelle und im letzten Abschnitt explizit thematisiert.

Dass zwei Bildorte zur Diskussion stehen, ist auf den Astigmatismus zurückzuführen, der verständlich wird, wenn man sich die allgemeinen Prinzipien der Bildentstehung vergegenwärtigt und auf die ebene Grenzfläche anwendet. Bekanntlich entsteht das Bild dort, wo die vom Objekt ausgehenden und an der Grenzfläche gebrochenen Lichtstrahlen in der rückwärtigen Verlängerung zum Schnitt gelangen. Für den Fall einer endlichen Pupillenausdehnung und eines Einblicks abseits von der optischen Achse (senkrechter Einblick) ist das Bild im Allgemeinen nicht mehr zentriert. Vielmehr hüllen die rückwärtigen Strahlen einen Bildkörper ein, der zwei längliche Einschnürungen aufweist: das sagittale und das meridionale Bild. Aus der Annahme, dass die Ausdehnung der Pupille vernachlässigbar klein ist, ergeben sich schließlich die beiden Bildpunkte mathematisch durch den Grenzübergang des gegen Null strebenden Pupillendurchmessers. Jeder der beiden Hebungstypen beansprucht eine eigene Vorschrift der Bildkonstruktion und führt deshalb auch zu einer eigenen Art der Anordnung und Deformation von unter Wasser erblickten Gegenständen. Es ergeben sich mithin zwei wesentlich verschiedene optische Räume.

Die erwähnte Kontroverse bzgl. der Hebungsrichtung beim einäugigen Sehen mag zunächst irritieren, sollte man doch erwarten, dass zumindest die experimentelle Überprüfung, im einfachsten Fall der Blick in ein Wasserbassin, eine Entscheidung herbeiführen kann. Wie sich dagegen zeigt, ist es einerseits relativ schwierig, für die freie einäugige Beobachtung eine experimentelle Situation herzustellen, die ein eindeutiges Urteil über die Hebungsrichtung erlaubt. Zum anderen scheinen die in der Literatur dargestellten Beobachtungen häufig durch Erwartungen aus der Theorie beeinflusst zu sein, insbesondere dann, wenn die jeweils zweite Hebungsart unerwähnt bleibt. Vom geometrisch-analytischen

Standpunkt sind die Orte der sagittalen und meridionalen Bildpunkte gleichwertig, so dass sich die Frage erhebt, ob die bisherigen theoretischen Annahmen zur Bildkonstruktion an ebenen Grenzflächen ausreichen können.

Wie in diesem Beitrag gezeigt werden soll, genügt die vereinfachte Vorstellung einer punktförmigen Pupille nicht, um ein zweifelloses Urteil über die Lage des Bildes zu fällen. Insbesondere wird untersucht, welche Folgerungen sich aus der Gültigkeit der üblichen Bildkonstruktion für die einäugige Wahrnehmung ergeben und welche Konsequenzen dies für die experimentelle Beobachtung hat (Abschnitte 3 und 4). Anknüpfend an die Überlegungen zur Problematik des monokularen Sehens soll ein physikalisches Argument vorgestellt werden, durch welches das sagittale Bild gegenüber dem meridionalen ausgezeichnet wird. Dies betrifft nicht den geometrischen Ort der Bilder, sondern die jeweilige Bildhelligkeit. Es wird gezeigt, dass in einem erweiterten geometrischen Modell, welches die endliche Ausdehnung der Pupille berücksichtigt, die maximale Intensität des sagittalen Bildes proportional zum Pupillendurchmesser ist und elliptisch über eine scharfe Bildlinie abfällt, während das meridionale Bild über eine Bildfläche geringerer Intensität gleichmäßig verschmiert (Abschnitt 5).

Die Konfusion über die Richtung der Hebung spiegelt sich auch in entsprechenden Darstellungen von Schul- und Lehrbüchern. Wir stellen daher eine Diskussion ausgewählter Darstellungen zur optischen Hebung an den Anfang der nachfolgenden Überlegungen.

## 2. Darstellungen zur optischen Hebung in Schul- und Lehrbüchern

Im Rahmen der geometrischen Optik gehören die Phänomene der Lichtbrechung zum üblichen Kanon der Mittelstufenphysik. Schulbücher greifen diese

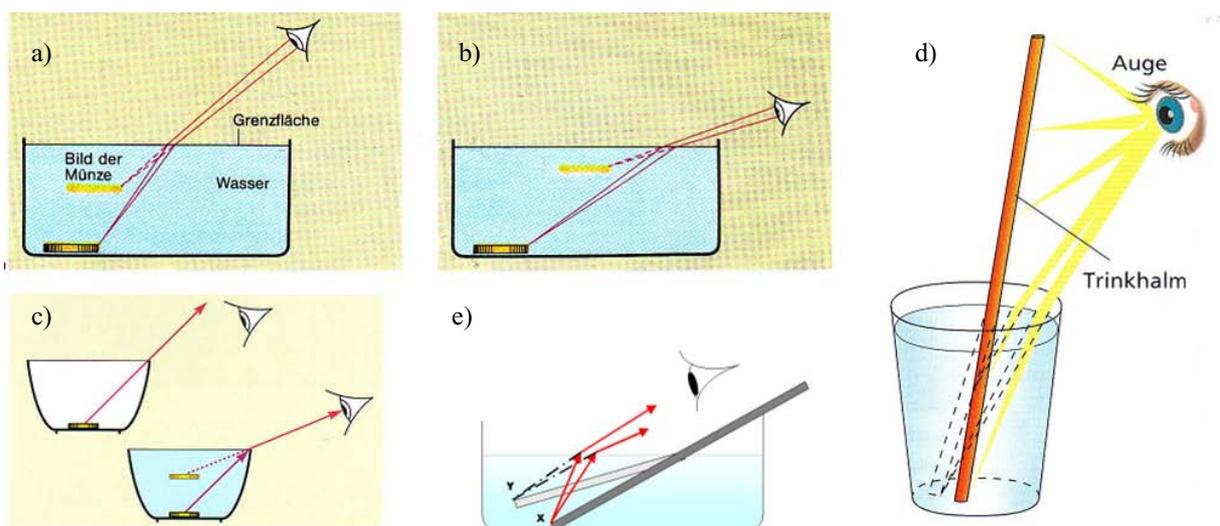


Abb. 3: Darstellungen zur optischen Hebung aus Schulbüchern des Landes Berlin a) – d) und aus Wikipedia e). Abbildung a) und b) zeigen die meridionale und c) die sagittale Hebung einer Münze. Die Darstellungen e) und d) widersprechen den optischen Gesetzmäßigkeiten: Der Stab wird optisch verlängert gesehen.

Thematik meist auf, indem sie neben fotografischen Abbildungen auch schematische Darstellungen in den Lehrtext einbinden, die vor allem die geometrischen Verhältnisse der brechenden Lichtstrahlen und deren Beziehung zur Bildentstehung im Auge veranschaulichen sollen. Eine exemplarische Auswahl hierzu zeigt Abbildung 3. Die nachfolgende Analyse nimmt vor allem die fachliche Richtigkeit der Abbildungen in den Blick (vgl. z.B. auch [5], [6] oder [7]).

Die Abbildungen 3a) und b) zeigen zwei aufeinanderfolgende Momentaufnahmen aus einer Sequenz, in der ein Beobachter unter zunehmend flacherem Winkel die optische Hebung einer Münze verfolgt. Der Ort des Bildes wird dabei durch den Schnittpunkt der rückwärtig verlängerten Lichtstrahlen angezeigt und liegt auf der Diakaustik (vgl. [8]). Die hier für das meridionale Bild angegebene Konstruktion ist richtig. Offen bleibt indessen, worin der physikalische Vorzug gegenüber der sagittalen Hebung besteht; diese bleibt einfach unberücksichtigt. Zudem geht aus der Abbildung nicht hervor, dass die Bildkonstruktion allenfalls für das einäugige Sehen gültig sein kann. In einer späteren Auflage desselben Schulbuches findet sich anstelle der genannten Abbildungen die Abbildung 3c). Sie zeigt die zwei relevanten Fälle des einleitend beschriebenen Freihandversuches in einer schematischen Seitenansicht. Nach dem Einfüllen von Wasser in die Tasse erscheint das zuvor nicht sichtbare Geldstück angehoben und zwar so, dass das Bild genau senkrecht über der Münze gesehen wird (vgl. [9]). Im Gegensatz zu den Abbildungen 3a) und b) erfährt das Bild für den

schräg in die Tasse blickenden Beobachter hier also eine sagittale Hebung. Wiederum wird jedoch die zweite mögliche Variante, in diesem Fall die in der früheren Auflage noch für richtig gehaltene meridionale Hebung ohne Angabe von Gründen vernachlässigt. Überdies gibt die Darstellung keinen Aufschluss über die geometrische Konstruktion des Bildes als Schnittpunkt relativ zum Auge rückwärtig ins Medium hinein verlängerter Lichtstrahlen. Tatsächlich ist dies in einer Querschnittszeichnung dieser Art auch gar nicht möglich. Anders als bei der meridionalen Hebung sind für die Bildentstehung des sagittalen Bildes vor allem Lichtstrahlen verantwortlich, die in einer Ebene senkrecht zur Bildebene liegen (s.u.). In der Widersprüchlichkeit der beiden Darstellungen wird so die Unsicherheit bzgl. der geometrisch exakten Lage des Bildes zugleich besonders anschaulich: Die aufeinander folgenden Abbildungspaare in den beiden Schulbuchauflagen geben je einen der möglichen Bildorte korrekt wieder. Zugleich kommt darin der Zwiespalt zum Ausdruck, dass die zwei theoretisch begründbaren Bildorte experimentell nicht gleichzeitig zu beobachten sind.

Die in Abbildung 3d) veranschaulichte Hebung widerspricht dagegen den physikalischen Gesetzmäßigkeiten: Der Strohalm knickt zwar an der Grenzfläche nach oben ab, gleichzeitig behält der unter Wasser liegende Abschnitt aber seine ursprüngliche Länge bei, so dass der Strohalm dort punktweise angehoben und zugleich vom Betrachter *entfernt* gesehen wird. Im Ergebnis hat sich der Strohalm optisch verlängert (vgl. [10]). Ein weiteres Beispiel

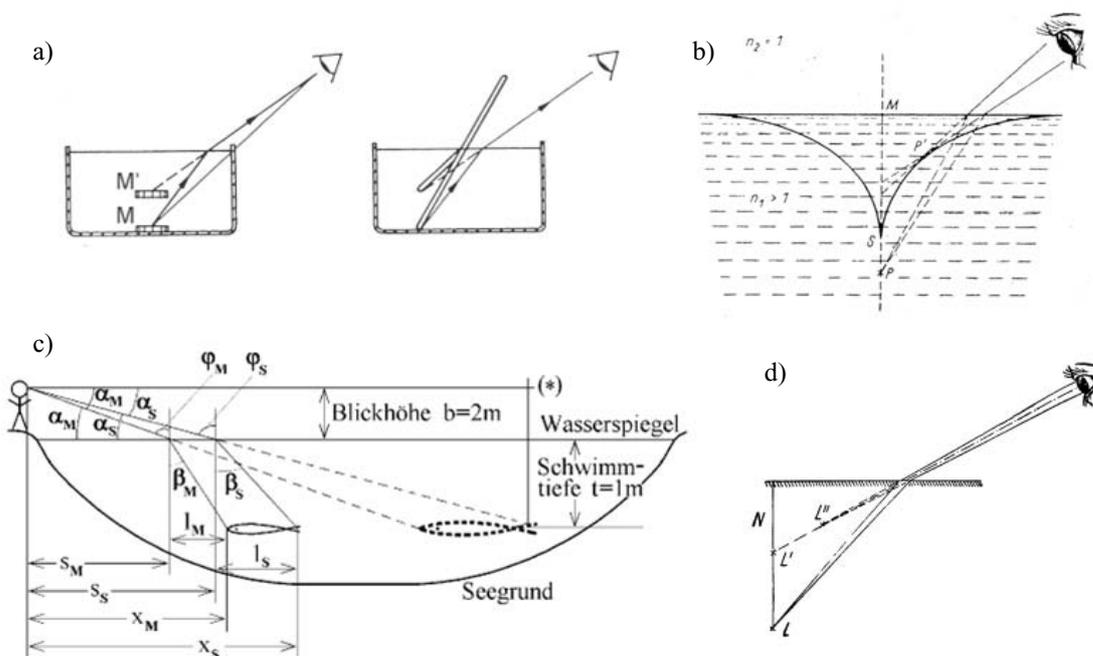


Abb. 4: Darstellungen zur optischen Hebung aus Lehrbüchern zur Experimentalphysik. a) Münze und Stab unterliegen der sagittalen Hebung, während in der zugehörigen Bildkonstruktion b) der meridionale Bildpunkt angegeben wird. In c) wird das Bild hinter dem Objekt gesehen, ohne dabei angehoben zu werden. Nach d) ist keine Entscheidung im monokularen Fall möglich.

hierzu zeigt die Abbildung 3e), das auf einer bekannten Internetseite zur Veranschaulichung der Hebungsverhältnisse verwendet wird (vgl. [11]). Ähnlich wie in dem Beispiel zuvor, hier aber besonders deutlich, soll der Stab nach oben abgelenkt und dazu verlängert gesehen werden; die Hebung erfolgt also diagonal von rechts unten nach links oben. Im Übrigen wird in keiner der Darstellungen die Hebung des Gefäßbodens mit berücksichtigt.

Die Beispiele ließen sich in vielfältigen Variationen fortsetzen – Ziel dieser Gegenüberstellungen von Illustrationen zur optischen Hebung in Schulbüchern soll keine Kritik an Schulbüchern, sondern der Hinweis sein, dass die in den genannten Beispielen zutage tretenden fachlichen Ungenauigkeiten und Fehlvorstellungen bereits in einschlägigen Lehrbüchern der Physik vorzufinden sind. So zeigt die Abbildung 4a) nacheinander die senkrechte Hebung einer Münze und die Verkürzung und Abknickung eines Stabes, wie sie sich aus der sagittalen Hebung ergeben. Im späteren Verlauf des Lehrbuchtextes wird auf diese Abbildungen dann kein Bezug mehr genommen. Stattdessen wird eine Bildkonstruktion zur meridionalen Hebung angegeben (Abb. 4b) und dementsprechend der Bildpunkt auf der zugehörigen Diakaustik liegend angenommen [12]. In Abbildung 4c) findet dagegen überhaupt keine Hebung statt: Das Bild des Fisches wird vergrößert auf der gleichen Höhe hinter dem realen Fisch gesehen [13]. Bei Pohl heißt es schließlich zur Konstruktion in Abbildung 4d):

Ein unter Wasser befindlicher Dingpunkt  $L$  wird von zwei Augen *senkrecht angehoben* im Punkt  $L'$  gesehen. *Das kann man mit dieser nur für ein Auge ausgeführten Konstruktion nicht erklären.* Sie führt auf einen zum Beschauer hin verschobenen Dingpunkt  $L''$ . Man muss vielmehr diese Konstruktion für beide Augen getrennt ausführen. Dann schneiden sich die beiden Einfallsebenen im Lot  $N$ , und auf diesem Lot liegt auch  $L'$  als Schnittpunkt der beiden Lichtbündelachsen. [14]

Zuletzt sei auf eine aktuelle Studie von *Kaewkhong et al.* aus dem Jahr 2010 aufmerksam gemacht, in der Fehlvorstellungen von Highschool-Schülern aus Thailand zum Lichtstrahlmodell und der damit verbundenen Brechung an ebenen Grenzflächen untersucht wurden [15]. Eine Aufgabe bestand darin, sich für die Position des gehoben gesehenen Objektpunktes aus einer Auswahl von 6 Möglichkeiten zu entscheiden und mit Hilfe eines Diagramms zu begründen. Etwa 50% entschieden sich für eine senkrechte, lediglich 9% für eine meridionale Hebung bei einer Stichprobe von 199 Schülern. Die Autoren selbst weisen die senkrechte Hebung als Fehlvorstellung zurück.

### 3. Optische Hebung zwischen Theorie und Wahrnehmung

Unterhalb einer ebenen Grenzfläche von Luft an Wasser befindet sich in der Tiefe  $Y$  ein Objektpunkt  $O$ . Von diesem Punkt geht, nach den Gesetzen der geometrischen Optik, ein Bündel von Lichtstrahlen aus, die an der Grenzfläche gemäß dem Snellius'schen Brechungsgesetz abgelenkt werden. Die Gesamtheit der Schnittpunkte aller rückwärtig verlängerten Lichtstrahlen umfasst dann den möglichen Bildbereich, ein Volumen, das durch die Diakaustik begrenzt wird. Dabei ist jeder rückwärtig verlängerte Lichtstrahl Tangente an die Diakaustik und der Schnittpunkt zweier beliebiger solcher Strahlen liegt innerhalb des Volumens. Ein Punkt  $E$  auf der Grenzfläche markiert den Einblickpunkt für einen Augpunkt  $A$  (Mittelpunkt der Pupille), der oberhalb der Grenzfläche liegt. Die Strecke  $EA$  schließt dann mit dem Lot auf die Grenzfläche den Einblickwinkel  $\theta$  ein. Mit diesen Angaben sind die maßgeblichen geometrischen Bedingungen der Bildhebung festgeschrieben. Für die weitere Diskussion ist es hilfreich, kurz die Überlegungen zu skizzieren, mit denen üblicherweise die Konstruktion der meridionalen und sagittalen Bildpunkte verknüpft ist. Zur Vereinfachung sei dabei im Weiteren der Schnitt als Bildebene gewählt, bei dem  $O$ ,  $E$  und  $A$  in einer Ebene senkrecht zur Grenzfläche liegen (s. Abbildung 5).

#### i) Überlegungen zur theoretischen Ableitung der meridionalen und sagittalen Bildpunkte

Zur Bestimmung des *meridionalen* Bildpunktes werden aus dem von  $O$  ausgehenden Strahlenbündel zwei in der Bildebene  $OEA$  liegende Strahlen betrachtet, die sich nur durch einen kleinen Winkel unterscheiden. Verlässt dann z.B. der Strahl  $OA$

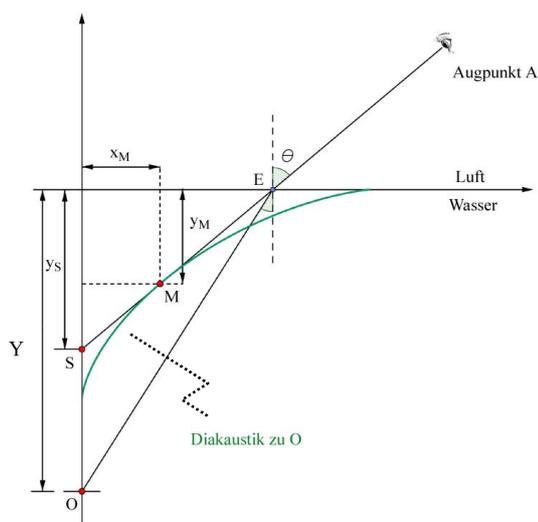


Abb. 5: Schematische Darstellung zur Bildkonstruktion. Die Blicklinie durch  $E$  berührt die Diakaustik (grün) im meridionalen Bildpunkt  $M$  und schneidet das Lot durch den Objektpunkt  $O$  im sagittalen Bildpunkt  $S$ .

gemäß dem Brechungsgesetz das dichtere Medium unter dem Winkel  $\theta/n$  tritt der zweite Strahl unter einem Winkel  $\theta + \Delta\theta$  aus. In der rückwärtigen Verlängerung schneiden sich diese beiden Strahlen im Bildbereich oberhalb der Diakaustik und formen dort einen Bildpunkt. Für den Fall, dass die vertikale Ausdehnung der Pupille als vernachlässigbar klein angenommen werden kann, führt der Grenzübergang von  $\Delta\theta \rightarrow 0$  auf den Bildpunkt  $M$ , das meridionale Bild von  $O$  auf der Diakaustik. Anschaulich bedeutet der Grenzübergang, dass sich die beiden Strahlen als Tangenten an die Diakaustik einander beliebig nähern und schließlich in  $M$  zusammenfallen. Die Berechnung der Koordinaten von  $M$  mit elementaren Methoden der Analysis ergibt (siehe z.B. [3], [16]):

$$x_M = Y \frac{(n^2 - 1) \sin^3 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (1)$$

$$y_M = -Y \frac{n^2 \cos^3 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (2)$$

Für das *sagittale* Bild werden aus dem Bündel zwei Strahlen gewählt, die in einer Ebene senkrecht zur Bildebene liegen, welche die Strecke  $OE$  enthält. Wie zuvor schließen die Strahlen einen kleinen Winkel  $\Delta\varphi$  ein, jedoch ist der Winkel  $\theta$ , unter dem sie aus der Grenzfläche austreten, aus Symmetriegründen für beide Strahlen gleich. Folglich befindet sich der Schnittpunkt  $S$  der rückwärtig verlängerten Strahlen auf dem Lot zur Grenzfläche durch  $O$ , d.h. senkrecht über dem Objektpunkt. An dieser Stelle deutet sich bereits eine gewisse Asymmetrie bei der Bildkonstruktion von sagittalem und meridionalen Bild an, denn die Lage des Schnittpunktes  $S$  ist offensichtlich unabhängig vom Öffnungswinkel  $\Delta\varphi$ . Daher wird der Grenzübergang  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  für eine zu vernachlässigende Querausdehnung der Pupille nur formal durchgeführt: An der Lage von  $S$  ändert dies nichts mehr. Im gewählten Koordinatensystem betragen die Koordinaten schließlich  $x_S = 0$  und entsprechend (siehe z.B. [1], [16]):

$$y_S = -Y \frac{\cos \theta}{\sqrt{(n^2 - \sin^2 \theta)}} \quad (3)$$

### ii) Abstand der Bildpunkte und Folgerungen für die experimentelle Verifikation

Eine sich unmittelbar anschließende und für die experimentelle Beobachtung aufschlussreiche Fragestellung betrifft den geometrischen Abstand der beiden Bildpunkte. Verwendet man die Gleichungen (1), (2) und (3) und dazu den Lehrsatz des Pythagoras, ergibt sich für den Abstand von  $S$  und  $M$  die Beziehung:

$$\overline{SM} = Y \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (4)$$

Setzt man in diese Gleichung die für die freie einäugige Beobachtung leicht realisierbaren Werte von

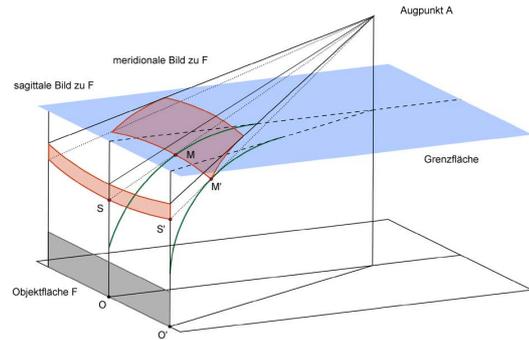


Abb. 6: Sagittales und meridionales Bild nehmen für die einäugige Beobachtung im Gesichtsfeld den gleichen Raumwinkel ein und erscheinen daher gleich groß.

$Y = 30$  cm,  $n = 1,33$  (Brechzahl von Wasser) und  $\theta = 45^\circ$  ein, erhält man für den besagten Abstand einen Wert von  $\overline{SM} = 8,1$  cm! Man könnte erwarten, dass das Auge bei einer optischen Distanz dieser Größenordnung in der Lage ist, zwischen sagittalem und meridionalen Bildpunkt zu unterscheiden.

Die Erfahrung lehrt indessen, dass für das einzelne Auge Abstände nur sehr schwer einzuschätzen sind. Zu den objektivierbaren Kriterien, die brauchbare Entfernungsangaben auch aus der subjektiven Beobachterperspektive liefern, gehören die perspektivische Vergrößerung, die Parallaxe und die Akkommodation.

### iii) Die perspektivische Vergrößerung als Entscheidungskriterium?

Wie Abbildung 6 zeigt, liegen die Punkte  $S$ ,  $M$  und  $A$  auf einer Geraden. In Bezug auf das Auge befindet sich der sagittale Bildpunkt demnach auf derselben Blicklinie hinter dem meridionalen Bildpunkt. Die Verallgemeinerung für ausgedehnte Formen ist in Abbildung 6 schematisch für die Fläche  $F$  eines Rechtecks dargestellt. Wendet man die beiden Konstruktionsprinzipien punktweise auf die Rechteckfläche an, bildet die Gesamtheit der sagittalen (meridionalen) Bildpunkte das sagittale (meridionale) Bild von  $F$ . Die genannten Bilder sind selbst Flächen im Raum. Das senkrecht gehobene Bild von  $F$  liegt dabei in der gleichen Ebene wie das ursprüngliche Objekt  $F$ , ist aber zugleich gestaucht und zu den Seiten nach oben hin gekrümmt (Einblickwinkel für Punkte abseits der Blicklinie  $SA$  sind größer und die Hebung dort entsprechend stärker). Die Fläche des meridionalen Bildes liegt räumlich vor dem sagittalen Bild von  $F$  und ist nach Konstruktion vollständig in das durch den Augpunkt  $A$  und dem sagittalen Bild von  $F$  aufgespannte Volumen eingebettet. Für das Auge als Projektionszentrum nehmen beide Bilder daher den gleichen Raumwinkel ein. Die perspektivisch gesehenen Größen des sagittalen und des meridionalen Bildes von  $F$  sind demnach identisch: Eine Entscheidung über die Lage des Bildes

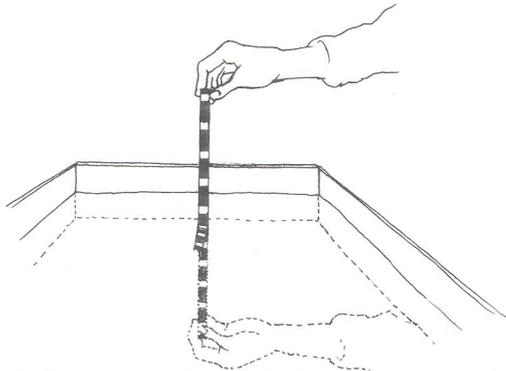


Abb. 7: Der eingetauchte Maßstab erscheint gestaucht und gehoben. Gleichzeitig wird er vom Spiegelbild des oberhalb der Grenzfläche liegenden Teiles überlagert. Der gespiegelte Maßstab kann als optische Referenz für einen Akkommodationstest dienen (entnommen aus [17]).

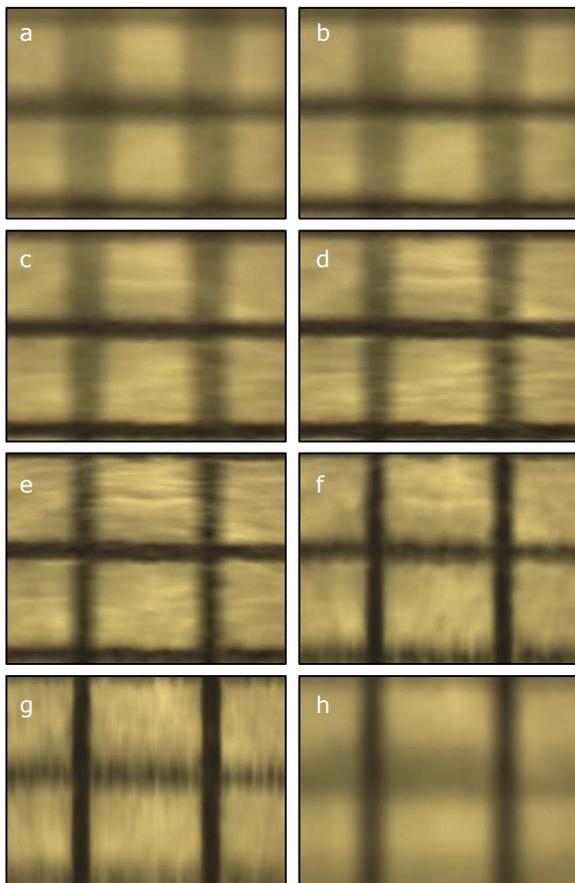


Abb. 8. Zwischen Millimeterpapier und dem Objektiv eines Mikroskops wird ein kleines Glasprisma geschoben. In der Reihe a – h ist die Bildwandlung bei Annäherung des Objektivs an das Prisma gezeigt. Man findet zwei Scharfeinstellungen: In der meridionalen Ebene treten horizontale Konturen hervor (d). In der sagittalen Ebene treten vertikale Konturen hervor (g).

auf der Grundlage der perspektivischen Vergrößerung allein reicht nicht aus.

iv) Parallaxe und Akkommodation – Zu den motorischen Schätzmechanismen der monokularen Raumwahrnehmung

Im Gesichtsfeld eines bewegten Beobachters verändern entfernte Gegenstände ihre Position langsamer als näher liegende. Diese als Parallaxe bezeichnete relative Verschiebung von Gegenständen in unterschiedlicher Entfernung von einem bewegten Beobachter ist für die Beobachtung am Wasserbecken unwirksam. Zum Einen hängt die Stärke der Hebung sowohl im meridionalen als auch im sagittalen Fall vom Beobachterstandort ab. Zum Anderen liegen, wie gezeigt wurde, die beiden Bilder für jeden beliebigen Standort hintereinander. Eine relative Verschiebung findet daher nicht statt.

Die dynamische Anpassung der Brechkraft des Auges (Akkommodation) ermöglicht es diesem, Objekte im Bereich zwischen Nah- und Fernpunkt scharf abzubilden. Erfahrungswerte zeigen dabei, dass ein Entfernungsunterschied zwischen Objektpunkten von 1-2 cm mit etwas Übung problemlos aufgelöst werden können. Akkommodationsanstrengungen, die beim einäugigen Sehen einen Übergang zwischen meridionalem und sagittalem Bildort anzeigen, sind in eigenen Versuchen bisher nicht gelungen. Insbesondere in experimentellen Situationen, in denen der Abstand etwa 8 cm betragen sollte, konnte dieser durch einen entsprechenden Akkommodationswechsel nicht nachgewiesen werden. Einen Hinweis darauf, dass das monokulare Hebungssehen ausschließlich sagittal verläuft, liefert auch das folgende Experiment, das auf G. Althage zurückgeht: Ein Maßstab wird senkrecht in ein Wasserbecken eingetaucht, so dass der unter Wasser liegende Teil gestaucht und gehoben erscheint. Gleichzeitig wird der gestauchte Maßstab vom Spiegelbild des oberhalb der Grenzfläche liegenden Anteils des Maßstabes überlagert. Indem der Maßstab etwas zur Seite geneigt wird, lassen sich beide Ansichten optisch trennen (Abb. 7). Aus den Gesetzmäßigkeiten am Spiegel folgt sofort, dass das Spiegelbild des Maßstabes in einer Ebene senkrecht zur Grenzfläche liegen muss und zwar derart, dass Teile vor der spiegelnden Grenzfläche lotrecht und äquidistant unterhalb der Spiegelfläche erscheinen. Mit dieser optischen Referenz lässt sich der Akkommodationstest auf den gestauchten Maßstab anwenden. Die nebeneinander liegenden Skalen des durch Hebung gestauchten und des gespiegelten Maßstabes erscheinen dem Auge gleich scharf. Der fehlende Akkommodationsübergang deutet demnach darauf hin, dass das gehobene Bild in der gleichen Ebene wie sein Spiegelbild liegt und die Hebung demnach sagittal verläuft.

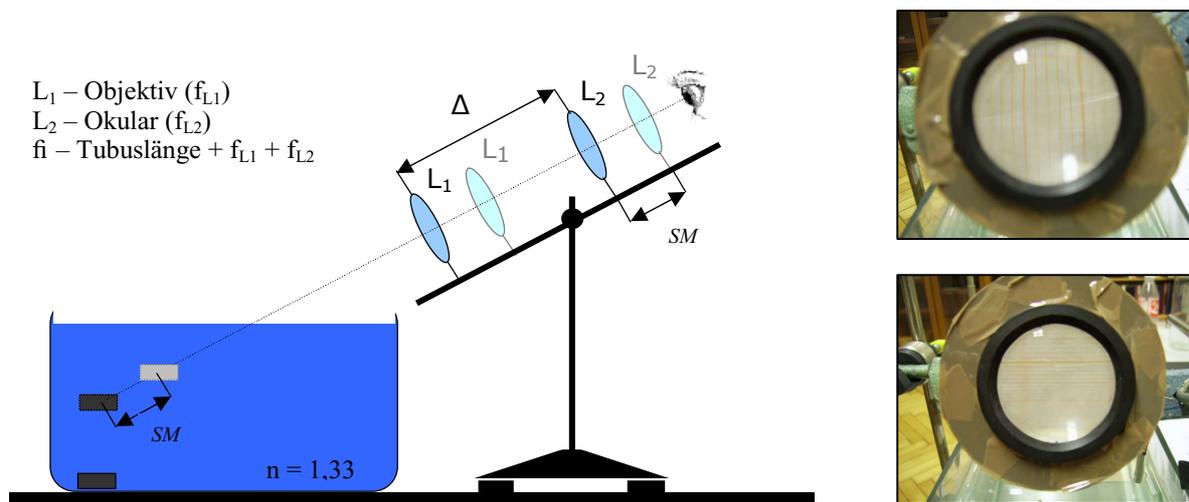


Abb. 9: Links: Schematische Darstellung zum Versuchsaufbau. Das Verschieben des Mikroskops entlang der optischen Achse liefert zwei Scharfeinstellungen. Rechts: In der tiefer liegenden Position werden vertikale Linien (oben) in der höher liegenden Position horizontale Linien (unten) scharf abgebildet.

#### 4. Sagittales und meridionales Bild im Experiment

Mit einem einfachen Experiment kann man sich von der Existenz der beiden Bildorte überzeugen: Unter das Tragglass eines Mikroskops wird ein Stück Millimeterpapier gelegt und das Mikroskop so ausgerichtet, dass die optische Achse des Tubus einen Winkel mit der Normalen zum Objektträger einschließt. Bei Mikroskopen, die nicht über eine schwenkbare Optik verfügen, kann statt des Tragglases auch ein kleines Keilprisma verwendet werden, um den schrägen Aufblick auf die ebene Grenzfläche zu erreichen (vgl. auch [5]). Man findet dann zwei Einstellungen, bei denen entweder die vertikalen Linien (tiefer liegende Position) oder die horizontalen Linien (höher liegende Position) des Millimeterpapiers gegenüber den jeweils orthogonalen Linien scharf hervortreten (Abb. 8). Die Positionen der Scharfeinstellungen relativ zur Länge des durchblickten Mediums korrespondieren jeweils mit den geometrischen Orten des sagittalen und meridionalen Bildes.

Eine qualitative Untersuchung der Abstandsbeziehung (4) für den Einblick am Mikroskop für verschiedene Objektiefen  $Y$  und Einblickwinkel  $\theta$  haben Bartlett und Lucero durchgeführt (vgl. [16]). Die Abstände liegen dort im Millimeterbereich und damit weit unterhalb des akkommodativen Auflösungsvermögens des Auges. Im Folgenden soll ein Experiment vorgestellt werden, bei dem die Auflösung auch am Wasserbassin im Zentimeterbereich gelingt. Für diesen Versuch wurden zwei Sammellinsen als Objektiv ( $f_1 = 50$  mm) und Okular ( $f_2 = 80$  mm) zu einem als Mikroskop wirkenden Linsensystem kurzer Brennweite (ca. 3 cm) zusammengesetzt (Abb. 9, links). Laminiertes Millimeterpapier, das auf der senkrechten Innenwand des Bassins angebracht wurde, diente zur Anzeige der Objektiefe. Die optische Achse des Tubus wurde dann für verschiedene Einblickwinkel auf das durchs Mikroskop

gehoben gesehene Bild einer Markierung auf dem Millimeterpapier ausgerichtet. Variationen der Tubuslänge  $f_i$  führten wiederum auf zwei Scharfeinstellungen, in denen entweder die vertikalen oder horizontalen Linien des Millimeterpapiers hervortreten (Abb. 9, rechts). Der Abstand zwischen diesen Einstellungen wurde mit einer Schieblehre gemessen und der Versuch für verschiedene Objektiefen wiederholt.

Die Tabelle in Abbildung 10 zeigt die aufgenommene Messreihe. Den gemessenen Werten ist jeweils der theoretisch berechnete Wert gegenüber gestellt. Die experimentelle Messunsicherheit ergibt sich aus einer Größtfehlerabschätzung der Einzelgrößen. In dem nebenstehenden Diagramm ist der Abstand  $SM$  (zwischen dem sagittalen und meridionalen Bild) über dem Einblickwinkel aufgetragen, wobei die ausgezogenen Kurven die Abhängigkeit zwischen  $SM$  und  $\theta$  nach Gleichung (4) für jeweils eine bestimmte Objektiefe  $Y$  zeigen. Die Messwerte erfüllen im Rahmen der Messgenauigkeit die Gleichung (4).

#### 5. Über die Bildpunkte der optischen Hebung unter Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Pupille

Das vorgestellte Experiment zur Auflösung der sagittalen und meridionalen Bildpunkte scheint im Widerspruch zur einäugigen Beobachtung am Wasserbassin zu stehen. Zum Einen deuten Versuche darauf hin, dass die Hebungsrichtung für diese Beobachtungsform streng orthogonal zur Grenzfläche verläuft (siehe z.B. [1], [5], [18], [19], [20]). Zum Anderen fehlt auch ein entsprechender Akkommodationsübergang zwischen den Bildorten, der im Zentimeterbereich deutlicher spürbar wäre.

Tiefe $Y$ (cm)	Winkel $\theta$ (Grad)	Gemessener Abstand (cm)	Berechneter Abstand (cm)	relative Mess- unsicherheit
2	70	$1,6 \pm 0,2$	1,6285	0,13
	60	$1,2 \pm 0,1$	1,1214	0,08
	50	$0,7 \pm 0,1$	0,7022	0,14
4	60	$2,2 \pm 0,1$	2,2428	0,05
	50	$1,5 \pm 0,1$	1,4043	0,07
	40	$0,7 \pm 0,1$	0,8050	0,14
6	50	$2,0 \pm 0,2$	2,1065	0,10
	40	$1,2 \pm 0,1$	1,2075	0,08
8	40	$1,7 \pm 0,1$	1,6100	0,06
	30	$0,7 \pm 0,1$	0,8215	0,14

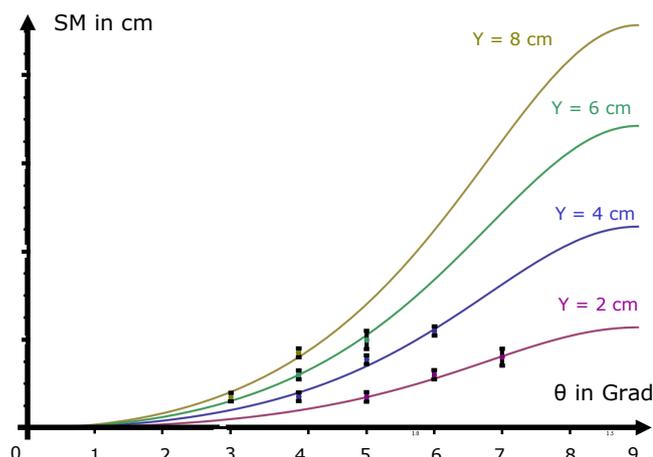


Abb. 10: Links: Die Messreihe zeigt die Abhängigkeit des Abstandes  $SM$  vom Einblickswinkel für unterschiedliche Objekt-tiefen. Rechts: Der Zusammenhang zwischen Abstand  $SM$  der Bildpunkte und Einblickswinkel  $\theta$  gemäß Gleichung (4) für je feste Objektiefe  $Y$ . Zusätzlich sind die Messwerte der Tabelle links eingetragen.

Die bisherigen Überlegungen legen daher den Schluss nahe, dass die vereinfachten theoretischen Annahmen zur Konstruktion der Bildorte nicht genügen können, um sie mit den Beobachtungen im Experiment in Einklang zu bringen. Vielmehr eine weitere physikalische Größe zur Erklärung erforderlich, die sich ergibt, wenn man das Prinzip der rückwärtigen Strahlverlängerung auf den allgemeinen Fall einer ausgedehnten Pupille anwendet. Die geometrische Konstruktion führt dann auf die Intensität bzw. Bildhelligkeit, die den sagittalen Bildort vor dem meridionalen auszeichnet.<sup>2</sup>

Betrachtet wird wiederum ein von  $O$  kegelförmig ausgehendes Strahlenbündel. Jeder Strahl ist nach dem Übergang an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft und anschließend rückwärtiger Verlängerung Tangente an die Diakaustik zu  $O$ . Im Folgenden interessiert der Bildkörper, der durch diejenigen rückwärtig verlängerten Strahlen entsteht, die in die Querschnittsfläche der Pupille einfallen. In der folgenden Argumentation wird die vertikale Ausdehnung der Pupille als Meridionalausdehnung und die horizontale Ausdehnung als Sagittalausdehnung bezeichnet. Die maximalen Sagittal- und Meridionalausdehnungen sind als Durchmesser  $D$  der kreisförmigen Eintrittsfläche der Pupille in der Regel gleich groß (im Mittel 2 mm für das Tagsehen und ca. 8 mm für das Nachtsehen). Die Gesamtheit der rückwärtig verlängerten Strahlen hüllt einen geometrischen Körper ein, der zwei Einschnürungen aufweist: das meridionale und das sagittale Bild von  $O$ . Im Gegensatz zur vereinfachten Betrachtung aus Abschnitt 3, bei welcher der Grenzwertübergang

einer gegen Null konvergierenden Pupillenausdehnung auf geometrische Bildpunkte führte, leiten sich die physikalischen Eigenschaften der beiden Bilder im Allgemeinen aus der Anzahldichte der sie konstituierenden Strahlen ab.

a) *Das sagittale Bild:* Strahlen, die jeweils in einer Ebene parallel zur Grenzfläche in die Pupille einfallen, schneiden sich in der rückwärtigen Verlängerung aus Symmetriegründen in einem Punkt, der senkrecht über dem Objektpunkt  $O$  liegt. Man denke sich dafür die Situation am Wasserbassin in einer Draufsicht: Die Brechung an der Grenzfläche verläuft stets in einer Ebene, die den Objekt- und den Augpunkt enthält, so dass jede rückwärtige Strahlverlängerung durch das Lot zur Grenzfläche durch  $O$  verlaufen muss. Je zwei Strahlen, die sich auf der gleichen Horizontalen befinden, schneiden sich folglich im selben Punkt senkrecht über  $O$ . Das sagittale Bild ist daher bei endlicher Ausdehnung der Pupille streng geometrisch eine (Brenn-)Linie, deren Länge durch die Meridionalausdehnung der Pupille bestimmt ist. Die Helligkeit eines Schnittpunktes ist proportional zur Anzahldichte der Strahlen, die durch ihn verlaufen und damit proportional zur Sagittalausdehnung der Pupille. Für die größte Sagittalausdehnung (Pupillendurchmesser) ergibt der Schnittpunkt gerade den sagittalen Bildpunkt  $S$  (siehe Abschnitt 3), der zugleich die größte Bildhelligkeit besitzt. Insgesamt ergibt sich für die sagittale Brennlinie daher ein symmetrisches Intensitätsprofil, das elliptisch zu beiden Seiten abfällt und sein Maximum mit  $I \sim D$  in  $S$  besitzt.

b) *Das meridionale Bild:* Der meridionale Bildpunkt  $M$ , der sich aus dem Grenzübergang der Pupillenausdehnung gegen Null ergibt, ist der Berührungspunkt an der Diakaustik für den rückwärtig verlängerten Strahl zum Pupillenmittelpunkt. Wie man leicht feststellt, lässt sich die Argumentation für das sagit-

<sup>2</sup> Ähnliche Überlegungen zur geometrischen Hebungsstruktur beim monokularen Sehen für den Fall, dass der Übergang von Wasser nach Luft erfolgt, finden sich bei Horváth & Varjú (vgl. [21])

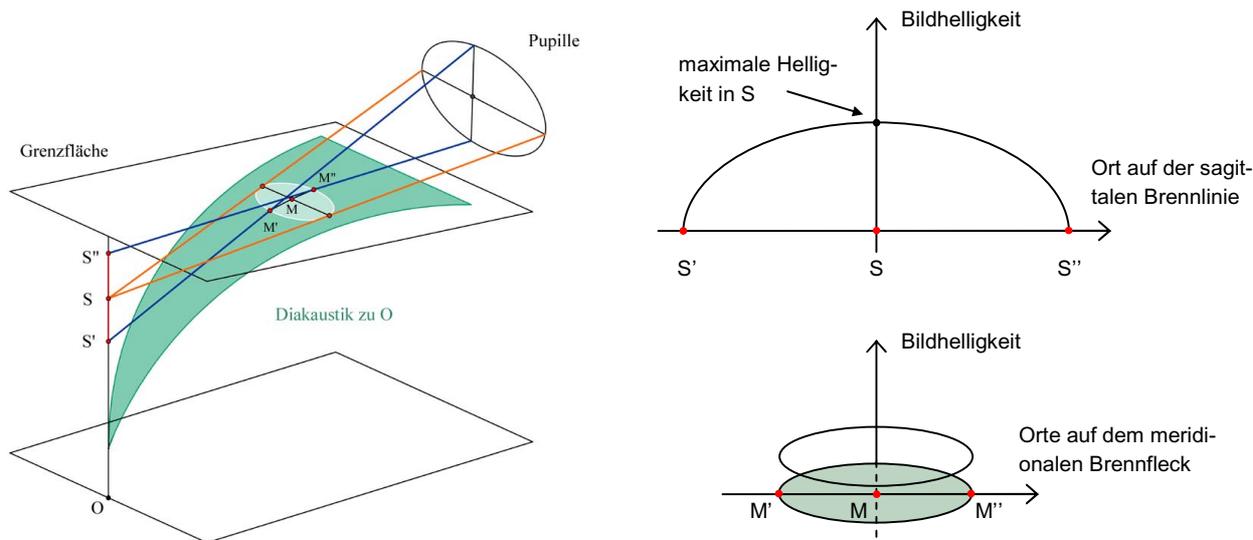


Abb. 11: Links: Zur Bildentstehung an der ebenen Grenzfläche unter Berücksichtigung der Pupillenausdehnung. Das meridionale Bild überstreicht eine Fläche, während das sagittale Bild eine scharfe Linie ist. Rechts: Qualitativer Vergleich von sagittaler (oben) und meridionaler (unten) Bildhelligkeit. Die maximale Bildhelligkeit der sagittalen Brennlinie ist proportional zum Pupillendurchmesser. Dagegen ist die Bildhelligkeit über den meridionalen Brennfleck gleichmäßig verteilt.

tale Bild nicht auf das meridionale Bild übertragen. Für zwei beliebige Strahlen, die vertikal in einer Meridionalebene der Pupille einfallen, ergibt sich wegen der unterschiedlichen Berührungspunkte mit der Diakaustik jeweils ein etwa an derer Schnittpunkt. Oder scharfer formuliert: K eine zwei beliebigen Paare von rückwärtig verlängerten Strahlen schneiden sich im gleichen Schnittpunkt. Nach dem Kriterium, wonach die Bildhelligkeit proportional zur Anzahldichte der durch den betreffenden Bildpunkt verlaufenden Strahlen ist, sollte das meridionale Bild deutlich lichtschwächer sein. Die konstante Bildhelligkeit ist proportional zum Quotienten aus der überstrichenen Fläche des meridionalen Bildes und der Eintrittsfläche der Pupille.

In Studien zum Thema, die den Astigmatismus an ebenen Grenzflächen zu mindestens erwähnen, findet man gelegentlich die Bemerkung, dass sagittales und meridionales Bild räumlich getrennte, orthogonale Brennlinien bilden ([6], [23]). Wie gezeigt wurde ist diese Bedingung lediglich für das sagittale Bild erfüllt.

### 6. Zusammenfassung

Auf die zu Beginn gestellte Frage, an welchem geometrischen Ort eine unter Wasser liegende Münze gesehen wird, lässt sich vor dem Hintergrund der vorgestellten Untersuchung nun eine eindeutige Antwort geben: Sie wird lotrecht über der tastbaren Münze am Ort des sagittalen Bildes gesehen. Um zu diesem Ergebnis zu kommen, reichen – wie gezeigt wurde – geometrisch-analytische Überlegungen an einer als punktförmig angenommenen Pupille allein nicht aus. Diese führen vielmehr zu zwei gleicher-

maßen vertretbaren Standpunkten, bei der sich keine der beiden Hebuungsrichtungen durch eine besondere physikalische Eigenschaft auszeichnet. Im Experiment lassen sich sagittales und meridionales Bild und ihre Abstandsbeziehung nachweisen; theoretische Berechnungen stimmen mit experimentellen Messwerten im Rahmen der Messgenauigkeit gut überein. Im Widerspruch dazu stehen Beobachtungen, die für den Fall des monokularen Sehens eine ausschließlich senkrechte Hebung von Objekten stützen. Eine Auflösung bzw. Separation der beiden Bilder ohne optische Hilfsmittel, d.h. mit dem bloßen Auge, ist weder in eigenen Versuchen gelungen, noch in der uns bekannten Literatur belegt. Dieser Widerspruch mag ein Grund sein, der zu vielfach unterschiedlichen und z.T. fachlich falschen Darstellungen in Fach- und Schulbuchliteratur führt. Wie hier gezeigt wurde, lässt sich ein physikalisches Kriterium und damit ein Vorzug des sagittalen vor dem meridionalen Bild ableiten, wenn man die Gesamtheit der für die ausgedehnte Pupille zu berücksichtigenden Strahlen betrachtet. Während das sagittale Bild eine Brennlinie ergibt, liefert die Konstruktion für das meridionale Bild einen Brennfleck. Der damit verbundene Bildhelligkeitsunterschied stellt das sagittale gegenüber dem meridionalen Bild heraus. Offen ist bisher die experimentelle Überprüfung dieses Helligkeitsunterschieds.

Die hiergeführte Diskussion betraf vor allem das monokulare Sehen. Geht man jedoch über zum zweiäugigen Sehen, so vereinfachen sich die Bedingungen erheblich, denn durch Akkommodation und Konvergenz der Augen sehen wir die Objekte beim Blick durch die optisch dichtere Grenzfläche an der Stelle, wo sich die beiden Sehnerven der Augen kreuz-

zen. Für ein horizontal zur Grenzfläche liegendes Augenpaar schneiden sie sich am Ort des sagittalen Bildes. Für ein vertikales Augenpaar liegt der Schnittpunkt vor dem sagittalen Bild auf einer Diakustik. Beim Neigen des Kopfes rücken die Dinge auf den Beobachter zu: ganz so wie es sein sollte.

## 7. Literatur

- [1] Buchholz, I. (1980): Zum Bild von Punkten und Gegenständen unter Wasser. *PdN-Ph* **9**: 269 – 79
- [2] Grebe-Ellis et al. (2009): Lichtspuren im Wasser - Ein Experiment zum Verhältnis von Brechung und Hebung. *PhyDid* **3/8**: 86-91
- [3] Nassar, A. (1994): Apparent Depth. *Physics Teacher* **32**: 526-29
- [4] Arizaga, R. et al (2010): Image distortion due to the refraction by planar surfaces. *Eur. J. Phys.* **31**: 115
- [5] Altehage, G. (1959): *Durch das Brechungsgesetz definierte Abbildungen und deren geometrischen Eigenschaften*. Unveröffentlichte Staatsexamensarbeit
- [6] Rovsek, B.; Raspet, N.: Seeing a coin in the water from the air above - how it is and how it is explained in primary school textbooks. Proceeding GIREP conference 2006: <http://www.girep.org/proceedings/proceedings.html> (Stand 5/2011)
- [7] Horváth, G.; Buchta, K.; Varjú, D. (2003): Looking into the water with oblique head tilting: revision of the aerialbinocular imaging of underwater objects. *J. Opt. Soc. Am. A* **20/6**, 1120 – 31
- [8] Heepmann, B.; Muckenfuß, H.; Schröder, W., Stiegler, L.(1991): *CVK Physik Arbeits- und Informationsbuch*. 1. Auflage- 4. Druck, Cornelsen Verlag, Berlin
- [9] Heepmann, B.; Muckenfuß, H.; Schröder, W., Bresler, S. (2006): *Natur und Technik Physik* 7/8. 1. Auflage – 1.Druck, Cornelsen Verlag, Berlin
- [10] Meyer, L.; Schmidt, G.-D. (Hrsg.) (2006): *Physik 7/8. Berlin*. 1. Auflage, Duden Paetec, Berlin
- [11] Wikipedia (Artikel: Brechung): [http://de.wikipedia.org/wiki/Brechung\\_\(Physik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Brechung_(Physik)) (Stand 5/2011)
- [12] Bergmann, L.; Schaefer, C. (1978): *Band 3. Optik*, 7. Aufl., Berlin: de Gruyter
- [13] Turtur, Claus (2008): *Klausurtrainer Physik*. 2. überarb. Aufl., Wiesbaden: Teubner
- [14] Pohl, Wichard (2010): *Einführung in die Elektrizitätslehre und Optik*, 3. Aufl., Berlin: Springer
- [15] Kaewkhong, K.; Mazzolini, A.; Emarat, N.; Arayathanitkul, K. (2010): Thai high-school student' misconceptions about and models of light refraction through a planar surface. *Physics Education* **45 (1)**: 97 – 107
- [16] Bartlett, A.; Lucero, R. (1984): Note on a common virtual image. *Am. J. Phys.* **52(7)**: 640 – 43
- [17] Maier, G. (1993): *Optik der Bilder*. 3. verb. Aufl., Kooperative Dürnau
- [18] Grebe-Ellis, J.; Sommer, W.; Vogt, J. (2002): Abituraufgaben zur Hebung, Beugung und Polarisation. 1. Aufl., Kassel
- [19] Theilmann, F. (2010): Der Blick ins Becken – perspektivische Effekte und Bildverzerrungen in einfachen Situationen mit optisch dichten Medien. *PhyDid* **9/1**: 45 – 53
- [20] Farkas, N.; Henriksen, P.; Ramsier, R. (2006): Index of refraction without geometry. *Physics Education* **41(1)**: 69 – 72
- [21] Horváth, G-; Varjú, D. (1991): On the structure of the aerial visual field of aquatic animals distorted by refraction. *Bulletin of Mathematical Biology* **53 (3)**: 425 – 41
- [22] Arvidsson, G. (1938): Image of an Object Under Water. *Am. Phys. Teacher* **40(6)**: 164