Didaktik der Physik
Frühjahrstagung Bochum 2009

Mathematische Beschreibung von Schattenbildern im Kontext der phänomenologischen Optik

Thomas Quick[1], Marc Müller[1], Johannes Grebe-Ellis[2]
[1]Humboldt-Universität zu Berlin, AG Didaktik der Physik,
[2]Leuphana Universität Lüneburg, Phänomenologie und Didaktik der Physik

Kurzfassung
Schatten sind Bilder. Dies bemerkt jeder, der darauf achtet, wie unterschiedlich Schatten desselben Gegenstandes in der Beleuchtung durch verschieden geformte Leuchten aussehen. Die Bedingungen, unter denen sich beide – Schattengeber und Leuchte – im Schattenbild zur Geltung bringen, können formuliert werden, indem die für den Ort des Schattenbildes sich ergebenden Verdeckungsverhältnisse zwischen Schattengeber und Leuchte in Abhängigkeit ihres relativen Abstands zueinander berücksichtigt werden. In einem früheren Beitrag zur Entstehung und Verwandlung komplementärer Schattenbilder von Grebe-Ellis wurde die Vermutung aufgestellt, dass die charakteristische Verwandlung, die das Schattenbild während der Verschiebung des Schattengebers zwischen Leuchte und Projektionswand durchläuft, mithilfe der Faltung beschrieben werden kann und zugleich ein anschauliches Beispiel für diesen Transformationstypus liefert (vgl. [1]). Die Präzisierung und Ausarbeitung dieser Überlegungen im Rahmen einer Examensarbeit bestätigen die genannte Vermutung (vgl. [2]).

1. Einleitung

Eine kleine runde Pappscheibe (∅ 5 cm) wird als Schattengeber so vor eine ringförmige Leuchte (∅ 20 cm) gehalten, dass ihr Schatten auf einen (3 m von der Leuchte entfernten) Schirm fällt. Dabei zeigt sich: Je nach dem, wo sich die Pappscheibe zwischen Schirm und Leuchte befindet, sieht ihr Schatten anders aus. Bewegt man die Pappscheibe dann zwischen Schirm und Leuchte hin und her, gehen die unterschiedlichen Schattenbilder ineinander über: eine überraschende Verwandlung des Schattens wird sichtbar. Je näher die Pappscheibe dem Schirm ist, desto schärfer, geradezu scherenschnittartig, zeichnen sich ihre Umrisse auf diesem ab. Verschiebt man sie dagegen in Richtung der Leuchte, werden die Schattenränder zunehmend unscharf, beginnen die Übergänge zu zerfließen; radialsymmetrisch hellt sich das anfänglich noch dunkle, kreisförmige Schattenbild der Pappscheibe in ein Halbschattengebiet auf, das sich in alle Richtungen gleichmäßig ausdehnt. Wider Erwarten hellt sich dann das Zentrum des Halbschattens stärker als seine Umgebung auf und wird zu einem hellen Fleck, der sich nun seinerseits auszubreiten beginnt und bei weiter zunehmendem Abstand der Pappscheibe vom Schirm den Schatten scheinbar zurückdrängt – womit die anfängliche Ähnlichkeit des Schattens mit dem Schattengeber nahezu ganz verloren gegangen ist: Der Schatten hat vielmehr die Form eines Rings angenommen – er ist zum *dunklen Abbild* der beleuchtenden Ringlampe geworden.

Was bei jedem Schatten der Fall ist, in dem geschilderten Beispiel durch die Wahl der Ringlampe aber besonders deutlich hervortritt, ist zweierlei: Wie ein Schatten aussieht, hängt nicht nur von der *Form des Schattengebers*, sondern auch von der *Form der Leuchte* ab. Welche von beiden sich im *Bild* des Schattens erkennbarer geltend macht, hängt von der Position des Schattengebers zwischen Schirm und Leuchte ab. – In diesem Sinne wird hier von Schatten*bildern* gesprochen.

Das damit angedeutete und im Folgenden noch weiter vorgestellte Vorgehen zur Erschließung des Phänomenbereichs von Schattenbildern ist im Kontext der phänomenologischen Optik bereits vielfach beschrieben und ausführlich dargestellt worden (bspw. in [3], [4] und [1]). Offen geblieben ist bisher die Frage, um was für einen Transformationstypus es sich bei der gekennzeichneten Bildverwandlung handelt und ob es möglich ist, eine mathematische Beschreibung derselben zu geben. In einem früheren Beitrag zur Entstehung und Verwandlung komplementärer Schattenbilder wurde die Vermutung aufgestellt, dass die Veränderungen, die das Schattenbild während der Verschiebung des Schattengebers zwischen Projektionswand und Leuchte durchläuft, mithilfe der Faltung beschrieben werden kann [1]. Daran anknüpfend wird im Folgenden gezeigt, unter welchen Bedingungen es gelingt, Schattenbilder mit dem Faltungsprodukt der Schattengeber- und Leuchtenfunktion zu modellieren [2].

Zur Verdeutlichung des Vorgehens und um den Bezug zur phänomenologischen Methodik herzustellen, werden zunächst Aspekte einer phänomenologischen Schattenlehre hervorgehoben (siehe auch [1]). Untersucht werden nacheinander

1. der Einfluss der Leuchtenform auf das Schattenbild,
2. die Bedeutung der eingebundenen Perspektive für die Erschließung des Schattenbildes und

3. die Auswirkung von Änderungen der Schattengeberposition für die vom Schirm aus beobachtbaren Verdeckungsbeziehungen.

Die daraus sich ergebenden geometrischen Bedingungen werden dann im Folgenden mathematisch beschrieben.

2. Phänomenologie des Schattens

2.1 Einfluss der Leuchtenform auf das Schattenbild

Vor einer hellen Leinwand wird zunächst ein Objekt – in diesem Fall ein Stuhl – positioniert und bei gleich bleibenden Abstandsverhältnissen von unterschiedlich geformten Lampen beleuchtet (Abb. 1). Die dabei entstehende Unterschiedlichkeit der Schatten überrascht, erwartet man doch eher eine mehr oder weniger scharfe Kopie des Schatten werfenden Objekts. Dagegen zeigen die Schattenbilder, wie sich scharfe Übergänge auflösen und in breite Halbschattengebiete zerfließen. Vormals klar unterscheidbare Elemente scheinen unentwirrbar ineinander zu verschmieren – mal mehr mal weniger konturiert – und innerhalb eines Schatten können große Unterschiede auftreten. Offensichtlich verweisen die unterschiedlichen Schattenbilder desselben Objektes nicht nur auf dieses, sondern zugleich auf die Form der beleuchtenden Lampe.
Diese erste, noch ganz allgemeine Einsicht kann nun Anlass sein, die Versuchsbedingungen systematisch zu variieren und die Auswirkungen auf das Schattenbild genauer zu untersuchen [2, 3, 4]. Wer sich auf diese Weise mit den Veränderungen der entscheidenden Parameter und ihren Auswirkungen auf das Schattenbild vertraut gemacht macht, kann mit etwas Übung „im Schatten lesen“, d.h. vom „Stil“ des Schattenbildes auf die Form der Leuchte schließen.

2.2 Bedeutung der eingebundenen Perspektive für die Erschließung des Schattenbildes

In der üblichen, strahlenoptischen Erklärung der Entstehung von Schatten wird von einer vorgestellten Seitenansicht ausgegangen, in der die optischen Elemente Schirm, Schattenwerfer und Lichtquelle räumlich getrennt überblickt werden und sich der Schatten durch Einzeichnen von „Lichtstrahlen“ geometrisch ergibt. Demgegenüber kann eine phänomenologische Beschreibung von Schattenbildern auf ein Lichtmodell verzichten; sie macht sich die Untersuchungsmöglichkeiten zunutze, die sich ergeben, wenn man die oben beschriebene externe bzw. abgelöste Perspektive mit der eingebundenen Perspektive vertauscht: *Wie wird die Form des Schattenbildes aus den Ansichten verständlich, die sich für die Beobachtung vom Schattenbild aus ergeben?* Dieser Frage gehen wir am Beispiel des Stuhls aus Abbildung 1 weiter nach.
Wenn man sich an den Ort des Schirmes begibt und von dort aus zur Leuchte blickt, kann man, indem man sich durch den Schattenbereich bewegt, ver-

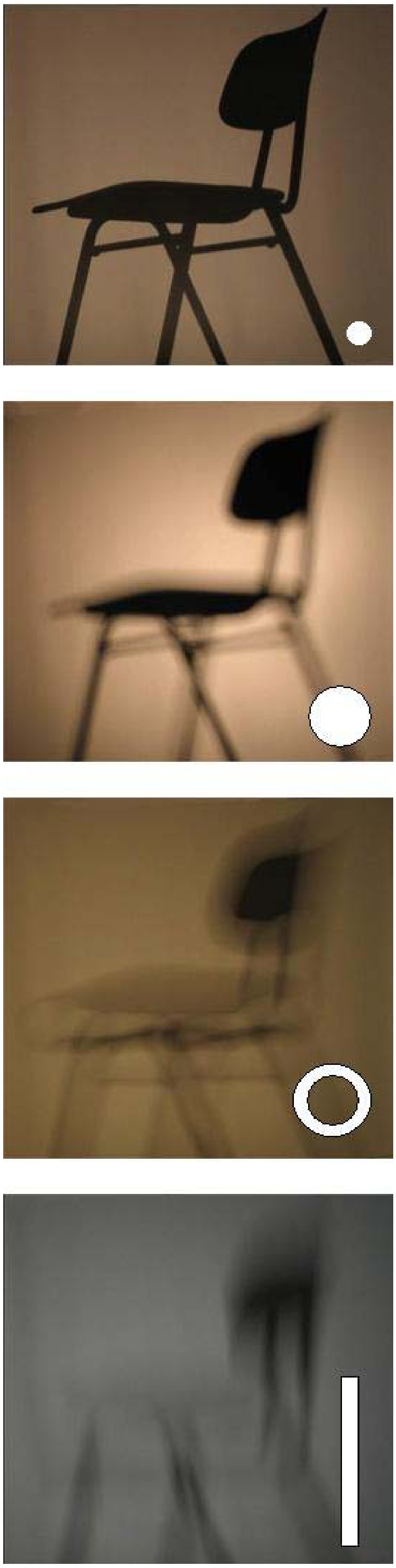

Abb. 1: Schattenbilder eines Stuhls (der selbst nicht mit abgebildet wird) in der Beleuchtung durch verschieden geformte Lampen. Diese sind jeweils rechts unten im Bild angegeben.

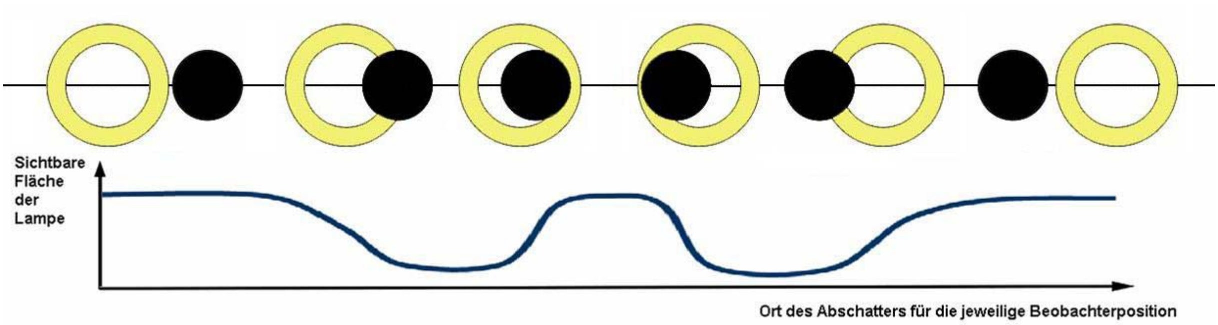

Abb. 2: Beispiel für die parallaxebedingten Verdeckungssituationen zwischen einem kreisförmigen Schattengeber (schwarz) und einer Ringleuchte (gelb), gesehen von verschiedenen Orten des beleuchteten Schirms. Die Bewegung des Beobachters erfolgt parallel zur Projektionsfläche.

schiedene Verdeckungsstadien zwischen Stuhl und Leuchte studieren. So vorgehend lassen sich auch zunächst kompliziert erscheinende Schattengebilde als Folge einer Verdeckungsordnung zwischen Stuhl und Leuchte mühelos auflösen: Je größer die Bereiche des Schirmes sind, von denen aus nur Teile der Leuchte gesehen werden können (weil der Stuhl die Sicht eben teilweise verstellt), desto heller und unschärfer bzw. verschwommener sind dort die Schattengebiete. Vollschatten herrscht gerade an jenen Stellen, von wo aus gesehen der Stuhl die Leuchte vollständig verdeckt. Und Übergänge aus solchen Vollschattenbereichen, bei denen nur ein geringer Ortswechsel auf dem Schirm erforderlich ist, um der Leuchte wieder vollständig ansichtig zu werden, drücken sich in relativ scharfen Schattengrenzen aus. Dagegen erfordern breit verlaufende, stark verschmierte Teilschattengebiete größere Ortswechsel, um die Verdeckungsstadien zwischen gesehener Ausdehnung des Schattengebers und Leuchte zu durchlaufen. Es kommt also darauf an, in welche Richtung die Leuchte ausgedehnt bzw. wie sie orientiert ist. – Auf diesem Wege wird aus der eingebundenen Perspektive verständlich, wie die vom Schirm aus, d.h. perspektivisch gesehenen Formen von Schattengeber und Leuchte die Genese des Schattenbildes auf dem Schirm bedingen.

Im Folgenden wird der bisher konstant gehaltene Abstand zwischen Schattengeber und Schirm bei fester Position der Leuchte als weiterer Parameter variiert.

2.3 Auswirkung von Änderungen der Schattengeberposition für die vom Schirm aus beobachtbaren Verdeckungsbeziehungen

Um den in Frage stehenden Zusammenhang zu verdeutlichen wird auf das Einführungsbeispiel Bezug genommen, bei der eine kleine runde Pappscheibe mit einer Ringlampe beleuchtet wurde.

In der Situation, in der sich die Pappscheibe nahe dem Schirm befindet, sieht die Beobachterin in der eingebundenen Perspektive den Schattengeber sehr groß im Vergleich zur Leuchte. Der Übergangsbereich, in dem sie die Leuchte teilverdeckt sieht, ist entsprechend schmal und auf dem Schirm zeigt sich folglich ein relativ scharfes Abbild der Pappscheibe. Dagegen erscheint die Pappscheibe perspektivisch umso stärker verkleinert, je weiter sie vom Schirm bzw. von der eingebundenen Beobachterin weg Richtung Leuchte geführt wird. Dies bedeutet wiederum, dass der Einfluss der Leuchtenform auf das Schattenbild zunehmend größer wird.

Befindet sich die Pappscheibe schließlich nahe an der Ringleuchte, kann die Beobachterin einen Ort am Schirm aufsuchen, von dem aus sie die perspektivisch stark verkleinerte Pappscheibe im Zentrum der vollständig sichtbar bleibenden Ringleuchte sieht. Diese Stelle des Schattens ist daher genau so hell wie alle anderen Stellen außerhalb des Schattenbereichs, von denen aus die Ringleuchte unverdeckt gesehen wird – womit das Rätsel des hellen Flecks inmitten des Schattens der Pappscheibe aufgeklärt ist. Bewegt sich die Beobachterin vom Ort des hellen Flecks ein wenig zur Seite, beginnt die Pappscheibe einen zunehmenden Teil des Leuchtenringes zu verdecken – weswegen diese Orte am Schirm bereits im Teilschatten liegen. Bewegt sie sich noch weiter, tritt die Pappscheibe parallaxebedingt nach und nach ganz neben die Leuchte und die entsprechenden Schirmbereiche sind wieder ganz hell bzw. schattenfrei. In diesem Fall bestimmt also die Leuchtenform das Schattenbild – und zugleich wird verständlich, weshalb auf dem Schirm ein dunkles Abbild der Ringleuchte erscheint: als „Spur“ derjenigen Orte, von denen aus die Ringleuchte teilverdeckt gesehen wird.

Durch die geordnete Variation der Versuchsbedingungen und ihre genaue Beobachtung erschließen sich so die wechselseitigen Beziehungen zwischen Leuchte, Schattengeber und Schattenbild. Das Schattenbild ist sowohl Bild der Leuchte als auch Bild des Schattengebers: Je deutlicher das eine auftaucht, umso undeutlicher wird das andere; beide Erscheinungen können nicht gleichzeitig existieren, obwohl sie sich in der Erscheinung gegenseitig bedingen.

3. Mathematik der Schattenbilder

3.1 Voraussetzungen

Ein mathematischer Formalismus, der die vorangestellten Überlegungen berücksichtigt, muss auf einer Beschreibung von Verdeckungssituationen zwischen Leuchte und Schattengeber beruhen. Wandert die

eingebundene Beobachterin mit Blick zur Leuchte auf dem Schirm entlang, verschieben sich in ihrem Gesichtsfeld beide „Sehdinge“ entsprechend ihrer Abstände vom Auge gegeneinander (Parallaxe): der näher gelegene Schattengeber bleibt gegenüber der entfernteren Leuchte zurück (Abb. 2). Aufgrund dieser parallaktischen Verhältnisse ergeben sich für die Beobachterin also je nach Position auf dem Schirm neue Verdeckungssituationen von Leuchte und Schattengeber.
Für die weiteren mathematischen Überlegungen werden an dieser Stelle Einschränkungen vorgenommen: So wird zum Einen von der räumlichen Ausdehnung von Lampe und Abschatter abgesehen, sondern vielmehr deren flächige Ansicht (Projektion auf die Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung) für die mathematische Beschreibung zugrunde gelegt. Daraus folgt, dass Lichtquelle, Schattengeber und Schirm in parallelen Ebenen liegen. Zum Anderen wird angenommen, dass die gesehenen Formen von Lampe und Abschatter unter Ortswechseln am Schirm erhalten bleiben, also zusätzliche perspektivische bzw. verzerrende Flächenveränderungen nicht berücksichtigt werden. Das Verhältnis der perspektivischen Gegenstandsgrößen bleibt konstant. Für genügend große Abstände bleibt ferner der Winkel, unter dem die Lichtquelle erscheint, nahezu konstant. Aber auch in den meisten anderen Versuchsanordnungen, in denen künstliche Lichtquellen vorkommen, ist diese Bedingung im Bereich der Schattenentstehung (nahe der optischen Achse) gut erfüllt.

3.2 Geometrisierung

Betrachtet wird ein Satz planparalleler Ebenen L, A und S, in der jeweils ein Koordinatenkreuz markiert wird. In der ersten Ebene L befindet sich die Lichtquelle, beschrieben durch $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. In einem Abstand d_2 wird in die Ebene A der Schattengeber platziert, dessen Koordinaten $\mathbf{x'} = (x_1, x_2)$ seien. Schließlich wird die Schirmebene S im Abstand d_1 durch Koordinaten $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ parametrisiert (s. Abb. 3). Mit diesen Angaben ist die Geometrie der zu untersuchenden Situation festgelegt. Unter Verwendung geometrisch-analytischer Überlegungen gelingt eine formale Beschreibung der Sichtbeziehung zwischen Lampe und Abschatter[1]. Die geometrische Form der Lampe wird dabei durch eine Funktion folgender Art ausgedrückt:

$$L(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & x_1,\, x_2 \text{ auf Lampe} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (1)$$

Ähnlich ergibt sich ein Ausdruck für die schattengebende Form:

[1] Für die mathematische Beschreibung siehe auch [5]. Die Faltungsmethode findet hier im Zusammenhang von Schattenbeschreibungen vor allem in bildsynthetischen Verfahren der Computergrafik Anwendung.

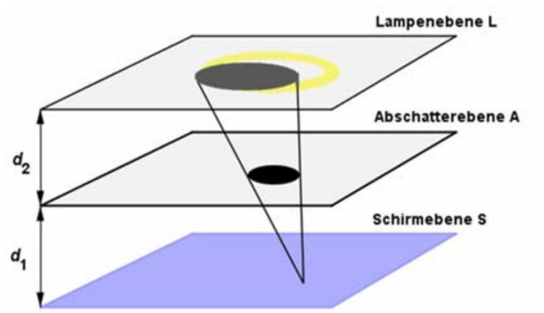

Abb. 3: Projektion des Schattengebers in die Lampenebene für einen ausgewählten Punkt auf dem Schirm, der mathematisch das Projektionszentrum zwischen Lampe und Abschatter bildet.

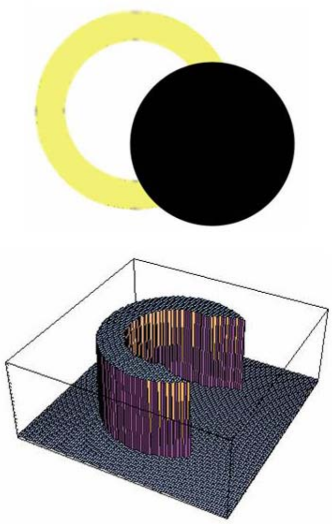

Abb. 4: Relative Verdeckung von Lampe und Abschatter aus der eingebundenen Perspektive für einen ausgewählten Ort am Schirm (oben). Darstellung im Funktionenbild, für das Lampenfunktion und projizierte Schattengeberfunktion miteinander multipliziert wurden (unten).

$$A(x'_1, x'_2) = \begin{cases} 0 & x'_1,\, x'_2 \text{ auf Abschatter} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (2)$$

Für die mathematische Auswertung genügt es nicht, die Form von Lampe und Schattengeber zu beschreiben. Um den Einfluss der Abstände d_1 und d_2 zu berücksichtigen, wird die Projektion des Schattengebers in die Lampenebene betrachtet. *In diesem Projektionsbild sind sämtliche Informationen, die sich in den Abstandsverhältnissen ausdrücken, enthalten.* Gleichzeitig markiert die Projektion jenes Gebiet relativ zur Lampe, das für den Beobachter nicht einsehbar ist (s. Abb. 3). Die Lage des Projektionsbildes (des Abschatters) hängt dabei vom Beobachterstandort ab, der mathematisch gesehen das Projektionszentrum bildet. Einfache geometrische Beziehungen ermöglichen eine Transformation

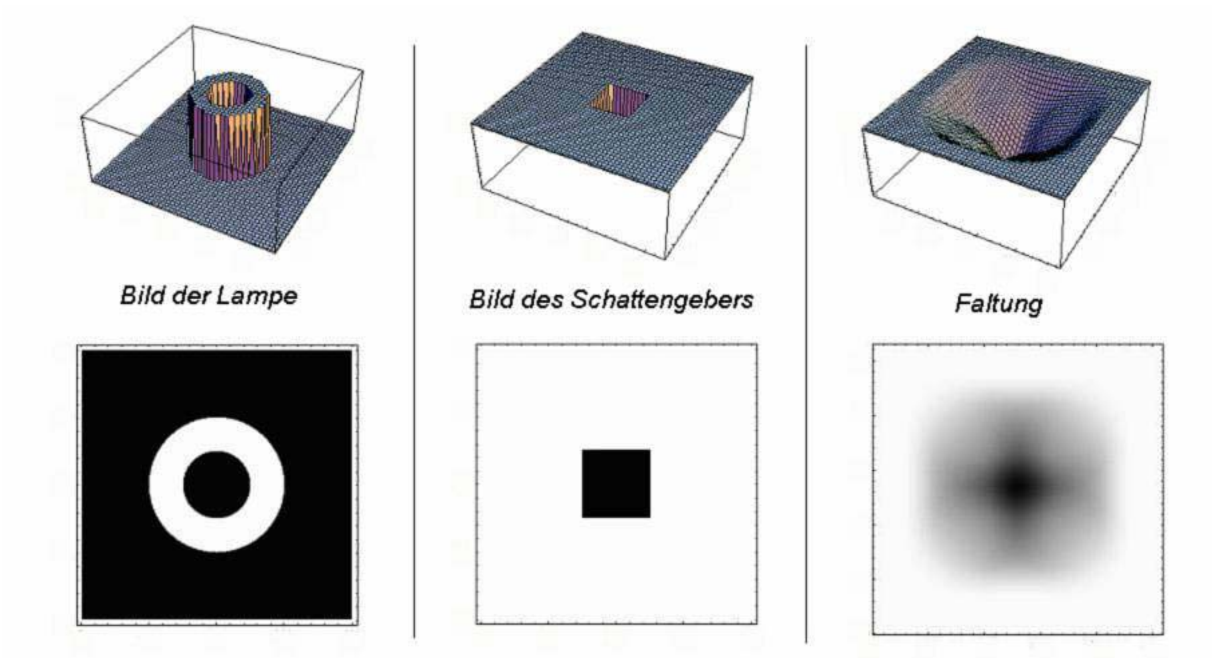

Abb. 5: Den Funktionen von Lampe und Abschatter bzw. ihrem Faltungsprodukt sind für k = 1 die jeweiligen Projektionen in die entsprechende Ebene gegenübergestellt.

A(x') → **A(x,y)**, in der die Projektion des Abschatters in Abhängigkeit der Beobachterkoordinaten und der relevanten Abstände d_1 und d_2 ausgedrückt ist:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}d_1 + \mathbf{y}d_2}{d_1 + d_2} \tag{3}$$

3.3 Das Faltungsintegral

Die sichtbare Ausdehnung der Lampe kann als Maß für die Beleuchtungsstärke an dem Ort betrachtet werden, an welchem sich das Auge befindet. Denn so, wie die Intensität bei zunehmenden Abstand zwischen Leuchte und Schirm mit dem Kehrwert des Quadrates des Abstandes abfällt, nimmt auch die perspektivische Größe der Lampe bei gleich bleibender Flächenhelligkeit mit dem Kehrwert des Abstandquadrates ab. Auf diesen nicht selbstverständlichen Zusammenhang von abgelöster und eingebundener Perspektive hat Maier hingewiesen [3]. Die Beleuchtungsstärke ergibt sich somit durch Integration des Produktes von Lampenfunktion und projizierter Abschatterfunktion über die gesamte Lampenebene.
Nach Art der Definition beider Funktionen (1) und (2) trägt nur der unverdeckte Anteil der Lampe zum Wert dieses Integrals bei, denn in diesem Bereich sind die Funktionswerte sowohl der Lampe als auch des projizierten Abschatters beide ungleich Null.

$$H(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} L(\mathbf{x}) A\left(\frac{d_1\mathbf{x} + d_2\mathbf{y}}{d_1 + d_2}\right) d\mathbf{x} \tag{4}$$

Das Integral (4) liefert für jeden Punkt auf dem Schirm eine Maßzahl für die von diesem Punkt aus sichtbare Fläche der Lampe, die sich für beliebige Verdeckungsstadien beider Funktionen von Lampe und Abschatter ergeben (Abb. 4). Wie im Weiteren gezeigt wird, lässt sich dieses Integral als ein Faltungsprodukt der Lampen- und Abschatterfunktion ausdrücken. Dazu werden zunächst für die Funktionen L(**x**) und A(**x,y**) folgende Bezeichnungen eingeführt

$$L_k(\mathbf{x}) = L(-k\mathbf{x})$$
$$A_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\left(\frac{k}{1+k}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)$$

Hierbei ist $k = d_2/d_1$ gesetzt. Diese Konstante beschreibt das Verhältnis zwischen den Abständen Lampe-Schattengeber und Schattengeber-Schirm (k=2 bedeutet z.B., dass die Lampe doppelt so weit vom Abschatter entfernt ist, wie der Schattengeber vom Schirm).
Mit dieser Ausdrucksweise lässt sich das Integral weiter umformen und letztlich in ein Faltungsprodukt überführen:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{y}) &= k^2 \int_{\mathbb{R}^2} L_k(-\mathbf{x}) A_k(\mathbf{x}+\mathbf{y})\, d\mathbf{x} \\ &= k^2 \int_{\mathbb{R}^2} L_k(\mathbf{x}) A_k(\mathbf{y}\text{-}\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= k^2 (L_k(\mathbf{x}) \circledast A_k(\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{5}$$

Das Schattenbild auf dem Schirm entsteht demnach durch eine Faltung der skalierten charakteristischen Funktionen der Lampe und des Schattengebers.

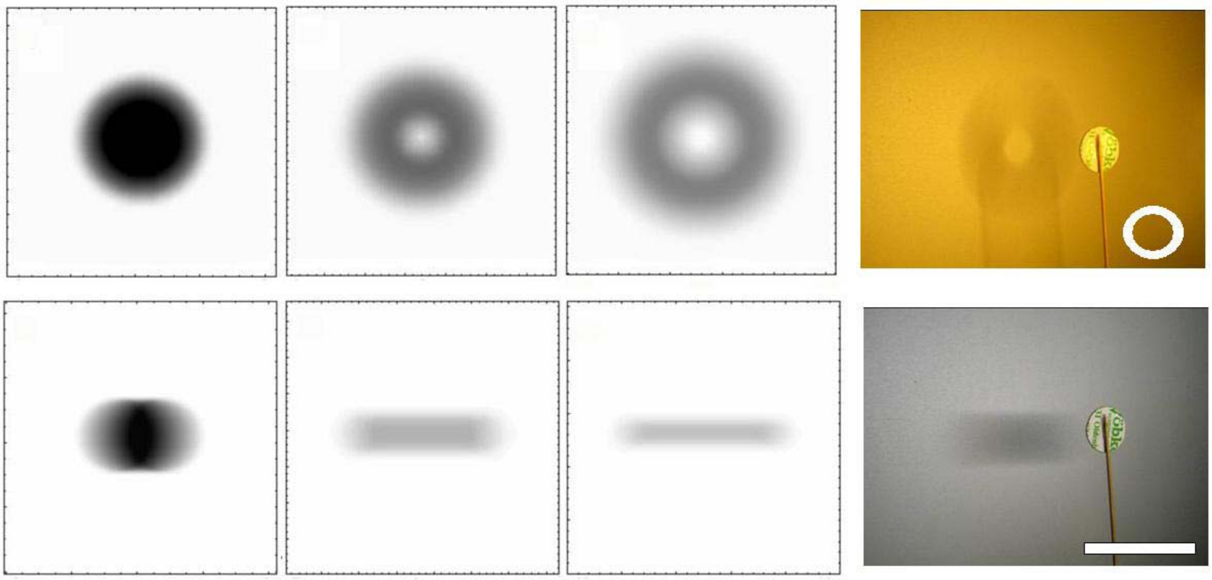

Abb. 6: Schattenmetamorphose für einen kreisförmigen Schattengeber unter Beleuchtung durch eine Ringlampe (obere Reihe) bzw. unter Beleuchtung durch eine Stablampe (untere Reihe) für zunehmenden Abstand des Schattengebers vom Schirm. Rechts ist zum Vergleich von Modellierung und Experiment jeweils eine experimentelle Situation gezeigt.

4. Ergebnisse

Der vorgestellte Formalismus zur Beschreibung von Schattenverläufen soll nun herangezogen werden, um ihn auf einige ausgewählte Beispiele anzuwenden. Bei hinreichend einfachen Lampen- und Schattengeberformen ist eine analytisch geschlossene Darstellung möglich. Dagegen müssen für die meisten Konstellationen numerische Methoden zur Lösung herangezogen werden.

Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Faltung zwischen einer Ringlampe homogener Helligkeit und einem quadratisch geformten Schattengeber in einer dreidimensionalen Darstellung. Jedem Ort auf dem Schirm wird gemäß Gleichung (5) der Wert des Faltungsproduktes $S(y_1, y_2)$ zugeordnet, so dass eine Art Höhenprofil entsteht, für welches große Funktionswerte entsprechend große Helligkeiten angeben. Der maximale Wert entspricht einer vollständig sichtbaren Lampe, d.h. der größtmöglichen Flächenhelligkeit. In Übereinstimmung mit der durch zunehmende Verdeckung der Lampe gegebenen Verringerung der Helligkeit, nehmen die Funktionswerte gleichermaßen ab. Die dunkelsten Stellen auf dem Schirm korrelieren mit der größten Verdeckung der Lampe. Das Faltungsintegral nimmt nur nichtnegative Werte an, demnach der kleinste denkbare Funktionswert Null beträgt. Dieser Fall kommt einer vollständigen Verdeckung der Lampe gleich, der aber praktisch nicht eintreten muss.

Um die zweidimensionalen Flächen im Raum in eine suggestivere Darstellung von Schattenkarten zu übersetzen, werden die Funktionswerte auf eine linear skalierte Graufolge von weiß bis schwarz abgebildet. Für drei verschiedene Parametereinstellungen von $k= d_2/d_1$ zeigt Abbildung 6 das Ergebnis der Faltung einer Ringlampe mit einem kreisförmigen Abschatter. Hieran lässt sich die prinzipielle Schattenverwandlung nachvollziehen: Befindet sich die Abschatterebene dicht über der Schirmebene (s. Abb. 6, oben), so erscheint deutlich das Abbild des Schattengebers. Gemäß der Zunahme des Abstandes zwischen Abschatter und Schirm, die sich in dem größer werdenden Verhältnis von d_1 und d_2 ausdrückt, tritt langsam das Bild der Lampe hervor. Man beachte weiterhin, dass die Schattenkarten unterschiedlich skaliert sind, um mehr Details auflösen zu können. Zum Vergleich zeigt Abbildung 6 unten die Schattentransformation für eine Stablampe und einem kreisförmigen Schattengeber.

Für eine größere Anzahl von Leuchten, die in derselben Lampenebene an unterschiedlichen Stellen positioniert werden und dabei selbst untereinander keine Verdeckung aufweisen, ergibt sich die Helligkeit durch Summation der unabhängig ermittelten Faltungsprodukte. In Situationen unabhängiger Lichtquellen gilt somit das Distributivgesetz der Lampen. Abbildung 7 zeigt ein Beispiel für zwei Ringlampen mit einem quadratischen Schattengeber.

Abschließend entfernt sich das folgende Beispiel von den herkömmlichen Situationen sehr einfacher Lampen- und Schattengeberformen und demonstriert das Potenzial dieser Art von Beschreibung von Schatten an einer etwas komplexeren Anwendung (Abb. 8). Das Bild des Abschatters kombiniert eine ringförmige Grundform mit dazu längs und quer angeordneten Streifen, die sich dem Ring als Kreuz aufprägen. Entsprechend setzt sich die Lampe ihrerseits aus einer Ringleuchte und einer eingefassten kreisförmigen Lampe zusammen. Die Abstände d_1 und d_2 wurden derart gewählt, dass in Abbildung 8 der fließende Übergang vom Bild des Schattenge-

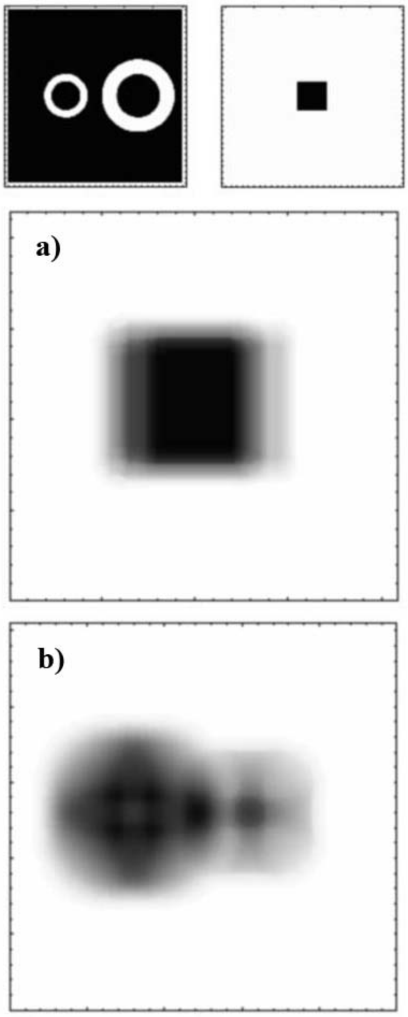

Abb. 7: Ein quadratischer Schattengeber wird mit zwei unterschiedlich großen Ringlampen beleuchtet – für a) k = 10 und b) k = 0, 7.

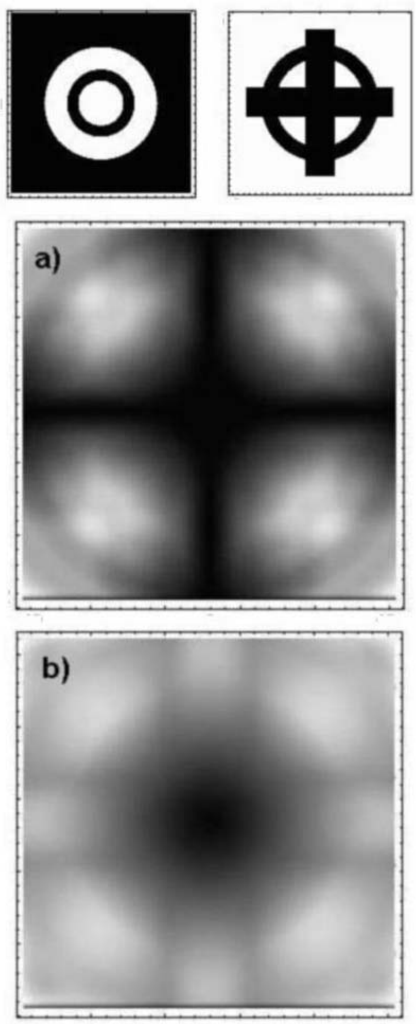

Abb. 8: Faltung zweier komplizierter Lampen bzw. Schattengeberformen – für a) k = 0, 8 und b) k = 0, 7.

bers in das Bild der Leuchte eingefangen werden konnte.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Der mathematische Formalismus der Faltung ermöglicht im Kontext einer phänomenologischen Erschließung von Schattenphänomenen die Beschreibung von Helligkeitsverläufen in Schattenbereichen. Der Schattenverlauf ergibt sich dabei als Faltungsprodukt der funktionalen Darstellung von Leuchte und schattengebendem Objekt. Ausgehend von der eingebundenen Perspektive ergeben sich für jeden potentiellen Beobachterort auf dem Schirm charakteristische Stadien der Verdeckung der beleuchtenden Lampe durch den Schattengeber. Die unverdeckt gesehene Fläche der Lampe ist dabei jeweils ein Maß für die Beleuchtungsstärke am jeweiligen Ort auf dem Schirm. Die Gesamtheit aller Verdeckungsansichten, die sich durch parallaktische Bewegung des Schattengebers vor der Lampe ergibt, liefert im Wechsel zur abgelösten Ansicht den Intensitätsverlauf des Schattenbildes auf dem Schirm. Für viele, vor allem künstlich erzeugte Versuchsanordnungen, in denen die diskutierten Voraussetzungen der Faltungsmethode in guter Näherung erfüllt sind, konnten mit dem Faltungsformalismus gute Ergebnisse erzielt werden.

Abschließend sei darauf aufmerksam gemacht, dass der vorgestellte Formalismus ebenso auf die komplementäre Situation angewendet werden kann, in der statt eines Abschatters eine Lochblende verwendet wird. Ein bekanntes Beispiel aus der Natur, bei dem eine kleine Öffnung Gelegenheit für die Entstehung eines hellen Abbildes der Leuchte gibt, sind die so genannten Sonnentaler. Bei einem Spaziergang durch den Wald kann man, je nach Sonnenstand, gelegentlich helle, nahezu kreisförmige Lichtflecken auf dem Boden im Schatten des weitverzweigten Blattwerks beobachten (siehe z.B. [6]). Besonders eindrucksvoll ist die Verwandlung der Sonnentaler bei einer partiellen Sonnenfinsternis, wenn der Mond nach dem ersten Kontakt langsam vor die Sonnenscheibe wandert und die Sonnentaler zugleich in schmale Sicheln übergehen. Wie im

Schattenbild einer Pappscheibe in *dunkles*, so tritt im geometrisch komplementären Blendenbild (einer Blätterdachlücke) ein *helles* Bild der beleuchtenden Lichtquelle hervor [1].
Die letztgenannte Abbildung, die auch als Lochkameraabbildung bekannt ist, kann gewissermaßen als das andere Extrem in der Schattenlehre aufgefasst werden: An die Stelle eines einzelnen, sichtverhindernden Schattengebers A in „freier“ Umgebung tritt eine Blende B, die man herstellen kann, indem der Abschatter A aus einer undurchsichtigen Leinwand oder Pappe herausgeschnitten wird. Ein Versuchsaufbau, bei dem sich eine solche Leinwand oder Pappe mit kreisförmigem Loch zwischen einer Ringleuchte und einem Schirm frei verschieben lässt, entspricht dann gerade der komplementären Situation (vgl. Abschnitt 2.3). Eine Variation der Abstände zeigt einen völlig analogen, aber in der Helligkeitsverteilung komplementären Verlauf der Bildtransformation, bei der mit zunehmendem Abstand der Lochblende vom Schirm nun ein *helles* Bild der Ringlampe erscheint [1].
Die im Vorangehenden dargestellte mathematische Beschreibung von Schattenbildern gibt ein Beispiel dafür, dass der phänomenologische Beschreibungsansatz eine Mathematisierung nicht ausschließt, wie zuweilen angenommen wird. Es wurde gezeigt, dass und wie es möglich ist, eine niveauvolle mathematische Beschreibung eines Phänomenzusammenhangs zu liefern, ohne dabei die eingebundene Perspektive zu verlassen bzw. von einem Lichtmodell Gebrauch zu machen.

Literatur

[1] GREBE-ELLIS, Johannes (2007): Lesen im Buch der Natur – Zur Entwicklung einer phänomenologischen Lesekompetenz. In: *Beitrag auf der Tagungs-CD der DPG-Frühjahrstagung in Regensburg*

[2] QUICK, Thomas (2008): *Helligkeitsverläufe in Schattenbereichen – Eine mathematische Beschreibung unter Verwendung der Faltung.* Unveröffentlichte Staatsexamensarbeit

[3] MAIER, Georg (2003): *Optik der Bilder*. Dürnau: Kooperative Dürnau.

[4] MACKENSEN, Manfred von; OHLENDORFF, H.-C. (1998): *Modellfreie Optik*. Kassel: Pädagogische Forschungsstelle

[5] SOLER, Cyril ; SILION, Francois (1998): Fast calculation if soft shadow textures using convolution. In: *Computer Graphics Proceeding*, S. 321-332

[6] SCHLICHTING, Joachim (1995): Sonnentaler fallen nicht vom Himmel. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 48/4*, S. 199-207