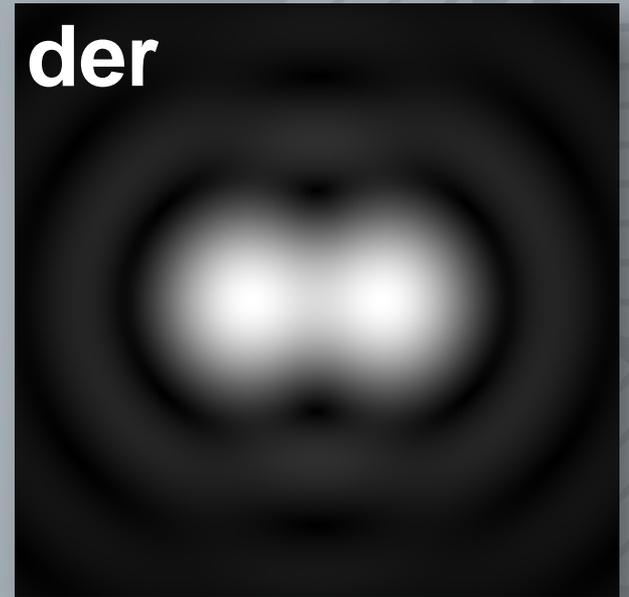


Anmerkungen zur Herleitung **der** optischen Auflösungsgrenze

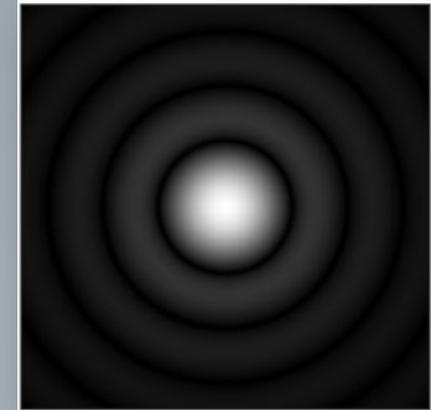
Oliver Passon und Johannes Grebe-Ellis
Bergische Universität Wuppertal
Physik und ihre Didaktik



Einführung: Die schulbuchübliche Herleitung

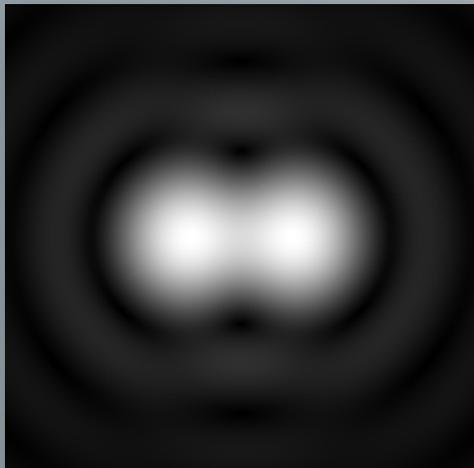
In der Wellenoptik werden Punkte nicht auf Punkte abgebildet.

Blick auf einen Stern durch ein Teleskop:



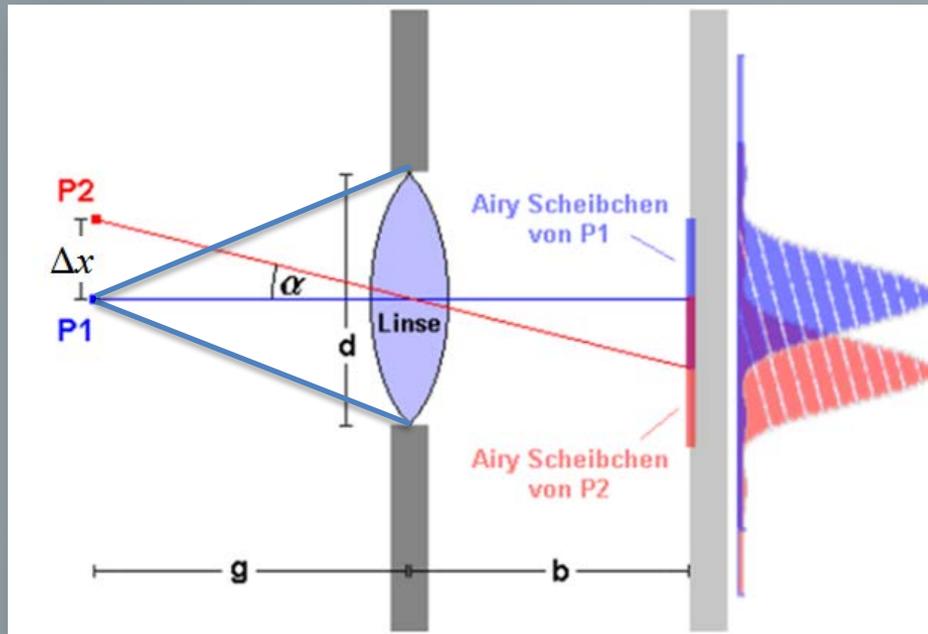
Winkel zum ersten Minimum:

$\sin \alpha_1 = 1,22 \cdot \lambda / d$ (mit d dem Durchmesser der Kreisblende)



Rayleigh (1874) schlägt vor:
Zwei Punktquellen (gleicher Intensität)
werden „aufgelöst“, wenn das Max. des einen
Beugungsmuster mit dem 1. Min. des zweiten
zusammenfällt.

$$\alpha_{\min} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{d}$$



$$\alpha_{\min} = \frac{\Delta x}{g}$$

Beim Mikroskop: $g \approx f$

$$\Delta x_{\min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot f}{d}$$

$$\sim \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$

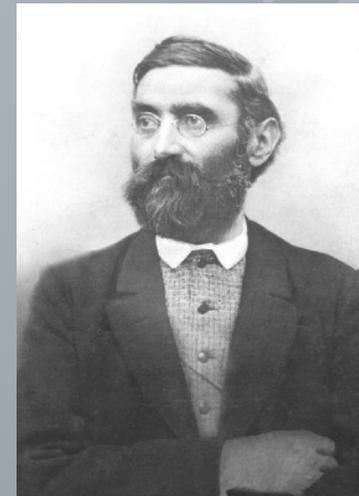
Metzler: „Die Wellennatur des Lichts setzt dem Auflösungsvermögen aller optischen Geräte (wie auch dem des Auges) eine natürliche, prinzipiell nicht überschreitbare Grenze, die von der Wellenlänge des benutzten Lichts und dem Durchmesser der beugenden Öffnung abhängt.“ (S. 311)

Kritik am Standardvorgehen:

- Das Rayleigh-Kriterium erklärt keine strenge Grenze
- Die Herleitung nach Abbe ist fachlich und didaktisch überlegen
- Alle diese Herleitungen müssen einen Fehler machen, denn auch die Abbe-Grenze wird in der Mikroskopie gebrochen...



John W. Strutt
(ab 1873 3. Baron Rayleigh)
1842-1919



Ernst Abbe
1840-1905

Herleitung des Abbe Kriteriums

Fragestellung von Abbe (1873):

Bis zu welcher Gitterkonstante d_{min} gelingt die Abbildung?

(Mindestens) die erste

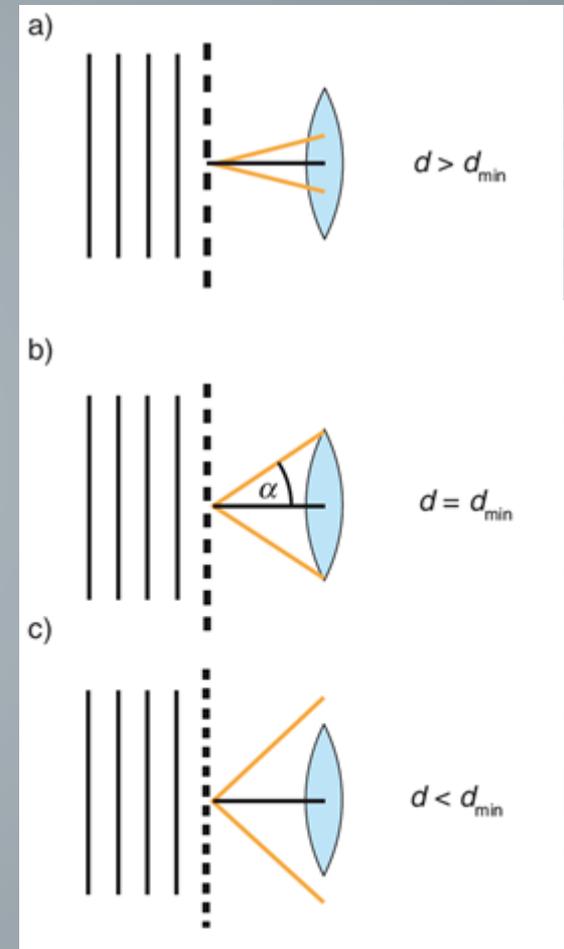
Beugungsordnung muss in das Objektiv

fallen: $\sin \alpha \geq \frac{\lambda}{d}$. Daraus folgt:

$$d_{min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

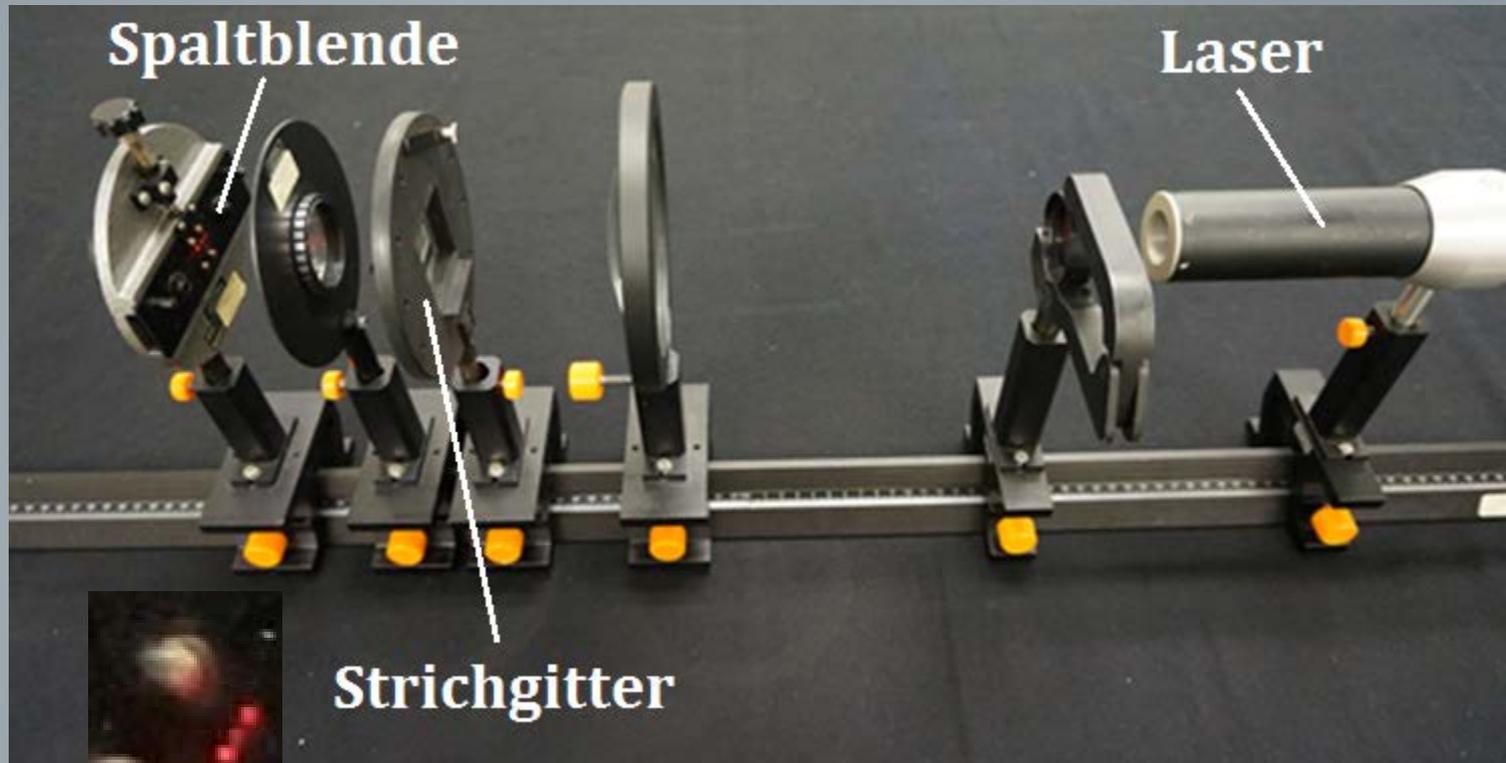
Bei schräger Beleuchtung:

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$



Anmerkung: Beliebige Objekte können als Überlagerung von periodischen Objekten dargestellt werden („Fourieranalyse“)

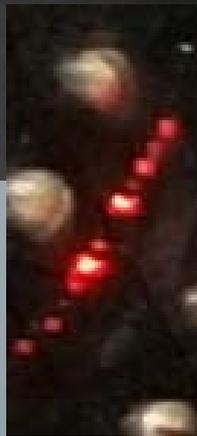
Experimentelle Realisation



Gitterbild mit
Beugungsordnungen

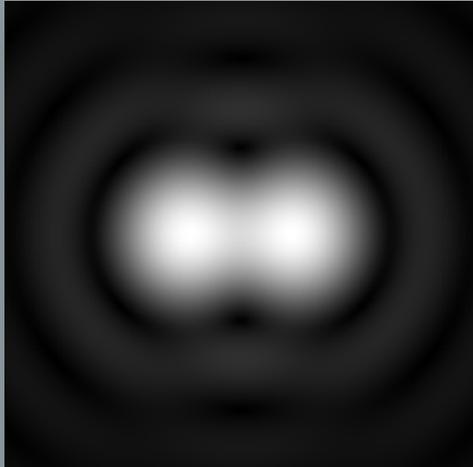


Gitterbild mit
ausgeblendeten
Beugungsordnungen

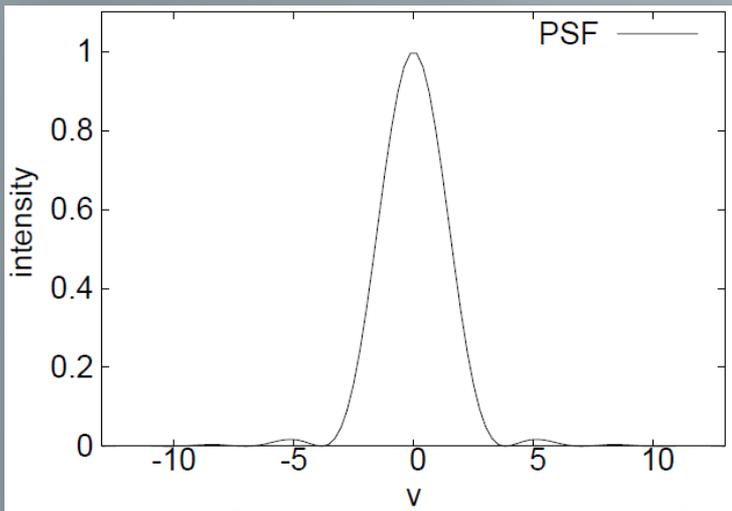


Dank an Max Düber!

Probleme des Rayleigh-Kriteriums



Warum sollte bei kleineren (Winkel-) Abständen die Auflösung **plötzlich** nicht mehr gelingen? (Rayleigh formuliert ein Kriterium für die „bequeme“ Beobachtbarkeit mit dem Auge)



Lokalisierung einer isolierten Quelle:

Das Beugungsmuster entspricht hier einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für Signale von einer Quelle im Zentrum (μ).

Genauigkeit der μ -Bestimmung: $\sigma_{\mu} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

Lokalisierung mit 1nm bei $\lambda \approx 500\text{nm}$ gelungen!

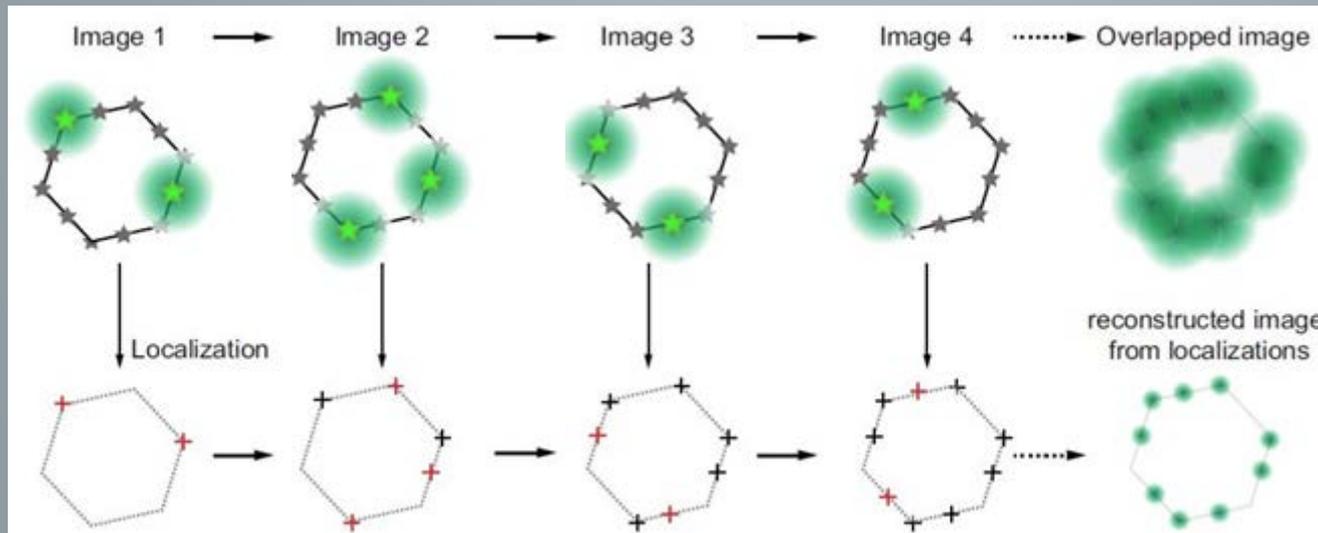
Yildiz, A. und P. R. Selvin (2005) "Fluorescence imaging with one nanometer accuracy: Application to molecular motors", Acc. Chem. Res. 38(7): 574.

Super-Mikroskopie

PALM (photo-activated localization microscopy)

STORM (stochastic optical reconstruction microscopy)

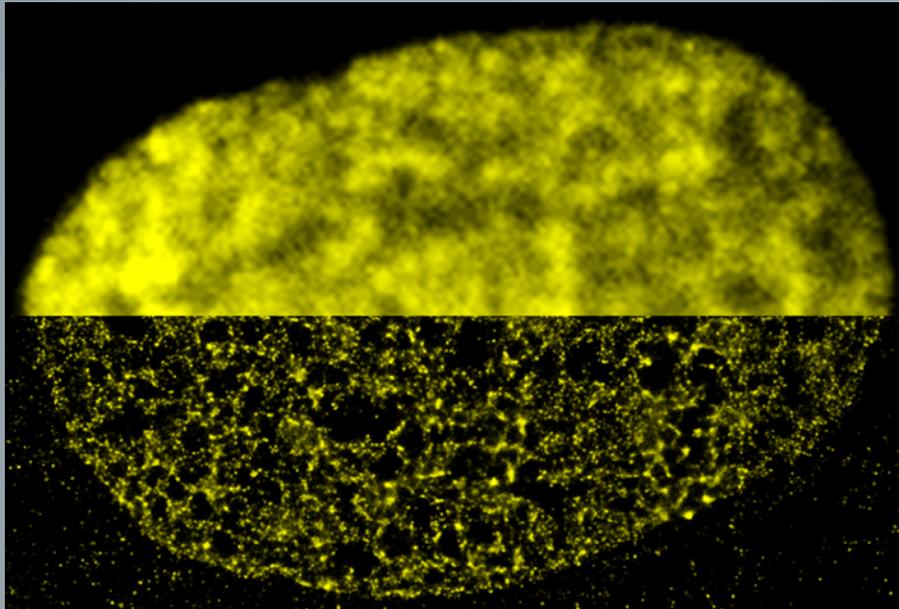
- Verfahren der Fluoreszenzmikroskopie
- Stochastische Anregung einer **Teilpopulation**, Detektion eines (Teil-)Bildes und Ortsbestimmung der Emitter mit beugungs**un**begrenzter Genauigkeit
- Erzwungene Abregung und erneute Anregung einer **anderen** Teilpopulation



Trick: räumlich dichte Strukturen werden „zeitlich“ getrennt...

Betzig, E et al. (2006) „Imaging intracellular fluorescent proteins at nanometer resolution“, Science 313(5793): 1642-1645.

Rust, M. et al. (2006) “Sub-diffraction-limit imaging by stochastic optical reconstruction microscopy (STORM)”, Nat. Methods 3: 793-796.

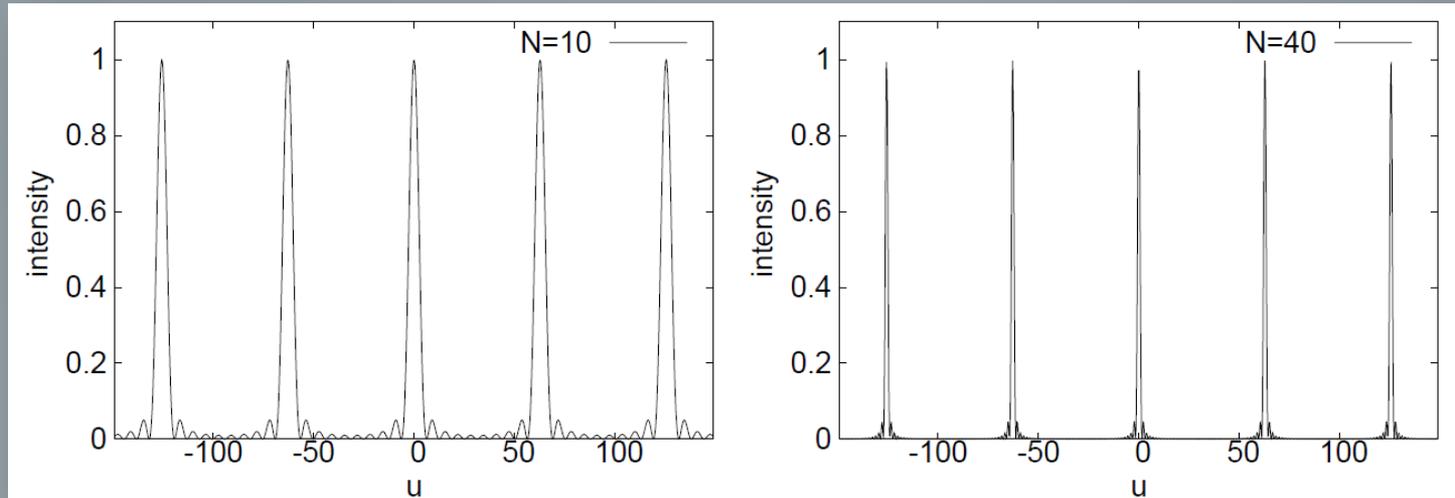


Auflösung $\approx 20\text{nm}$

Comparison of wide-field (upper) and STORM (lower) images of the core histone protein H2B in an intact human fibroblast nucleus.

Image courtesy of RICCI MA, MANZO C, GARCIA-PARAJO MF, LAKADAMYALI M, COSMA MP, at ICFO, Barcelona (Spain)

Ein zweiter Blick auf das Abbe-Kriterium



- Abbe diskutiert nur Hauptmaxima
- Endliche Gitter (bzw. Gegenstände) haben nicht nur Hauptmaxima, sondern auch Nebenmaxima, die Objektinformationen enthalten, die unterhalb der Abbe Grenze liegen!
- Die praktische Verwertung („*deconvolution*“) scheitert i.d.R. am Signal-Untergrund Verhältnis

Pask, C. (1976) Simple optical theory of super-resolution. J. Opt. Soc. Am. 66(1): 68-70.

- Das Rayleigh-Kriterium erklärt keine strenge Grenze, da die Charakterisierung der „Breite“ einer Verteilung mehrdeutig ist.
- Die **Beugungsgrenze** der Auflösung kann mit Abbeschlüssig begründet werden
$$d_{min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$
- Eine prinzipielle **Auflösungsgrenze** gibt es nicht

O. Passon & J. Grebe-Ellis (2016) „Moment mal:... Wie ist das optische Auflösungsvermögen definiert“, Praxis Naturwissenschaften – Physik in der Schule.