Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?

Neuere fachwissenschaftliche Entwicklungen und ihre didaktischen Implikationen

Oliver Passon und Johannes Grebe-Ellis

1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Heisenbergsche Unschärferelation (etwa für Ort und Impuls) in der Form:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \qquad (1)$$

gehört zu den Eckpfeilern der Quantentheorie und markiert den Unterschied zur klassischen Physik besonders eindrücklich. Im Physikunterricht der Oberstufe ist sie ein etablierter Inhalt. Aber wie ist ihre Aussage eigentlich genau zu verstehen? Bereits der sprachliche Ausdruck ist nicht eindeutig: Sind „Unschärferelation" und „Unschärfeprinzip" eigentlich dasselbe? Bezeichnet Δx eine „Ungenauigkeit", eine „Unschärfe", die „Unbestimmtheit" oder einen „Fehler"? Und wie ist das „Δ" exakt definiert? Als Standardabweichung oder durch eine andere statistische Kenngröße? Gilt die obige Aussage auch (oder vielleicht sogar nur) bei *gemeinsamer* Messung beider Größen? Welcher Zusammenhang besteht überhaupt zu tatsächlichen Messungen (und der dadurch verursachten „unkontrollierten Störung"?) Ist die Unschärferelation zwischen Energie und Zeit etwas prinzipiell anderes als die Beziehung zwischen Ort und Impuls? Dies sind erstaunlich viele Fragen für einen „Eckpfeiler", dem man ja eine gewisse Solidität zuschreiben möchte.

Natürlich geben die einschlägigen Lehrbücher der Quantenmechanik und die daraus abgeleiteten Elementarisierungen für den Physikunterricht mehr oder weniger eindeutige Antworten auf viele dieser Fragen. Erst jüngst hat Tobias Jung [1] in dieser Zeitschrift den Versuch unternommen, die philosophischen Implikationen der Quantentheorie ausgehend von der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation auszuloten und sich dabei ebenfalls in die „Lehrbuchtradition" ihrer Deutung gestellt.

In diesem Beitrag wollen wir jedoch auf neuere fachwissenschaftliche Entwicklungen eingehen, die einige dieser „Lehrbuchauffassungen" ergänzen oder sogar revidieren. Verblüffenderweise wird dadurch auch ein neues Licht auf elementare und schulrelevante Anwendungen der Unschärferelation geworfen; etwa das Heisenbergsche γ-Strahl Mikroskop, den Einfach- und den Doppelspaltversuch. Deshalb glauben wir, dass in diesem Fall die Ergebnisse jüngerer Forschung wichtiges Hintergrundwissen für die unterrichtende Lehrkraft liefern können und sogar unmittelbare didaktische Implikationen aufweisen.

2 Sprechweisen und Terminologie

Ein Großteil der angedeuteten Begriffsverwirrung klärt sich bereits, wenn man berücksichtigt, dass in der neueren Forschungsliteratur nicht mehr von „der" Unschärferelation gesprochen wird, sondern mindestens drei verschiedene (aber natürlich zusammenhängende) Typen unterschieden werden [2,3]:

A. Die Unmöglichkeit, einen Zustand zu präparieren, bei dem konjungierte Größen (wie Impuls und Ort) gemeinsam einen exakten Wert haben. Die Breiten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Werte unterliegen einer Unschärferelation. Dies ist die Standardauffassung, die sich in den meisten Lehrbuchdarstellungen findet.

B. Die Unmöglichkeit einer gemeinsamen genauen Messung solcher Größen. Die gemeinsame näherungsweise Messung weißt Ungenauigkeiten auf, die einer Unschärferelation unterliegen.

C. Die Messung einer Größe aus einem Paar konjungierter Variablen führt auf eine Störung der anderen Größe. Die Genauigkeit der Messung und die Größe der dadurch verursachten Störung unterliegen einer Unschärferelation (in der Literatur als „measurement-disturbance relation“ bezeichnet [2]).

Folgt man Busch et al. [3, S. 156], wird nur in der Kombination dieser drei verschiedenen Varianten der volle Gehalt der quantenmechanischen Unschärfe ausgeschöpft. Bereits in der Heisenbergschen Originalarbeit von 1927 [4] finden sich Aspekte aller drei Typen, wenn auch noch nicht streng geschieden und deshalb auch zu Missverständnissen einladend. Die mathematische Formalisierung von Unschärferelationen vom Typ B und C erweist sich gleichzeitig als die schwierigste und ist Gegenstand aktueller Forschung (siehe etwa [5]). Im unterrichtlichen Kontext ist eine Betonung der Unschärfebeziehung vom Typ A sicherlich zu rechtfertigen und im Folgenden werden wir uns auch auf diesen Typ konzentrieren. Für diese scheint zunächst die mathematische Formalisierung am einfachsten zu sein und – so die übliche Auffassung – bereits seit 1929 vollständig vorzuliegen. Mit Kritik an dieser Auffassung werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Wenden wir uns nun kurz der Frage zu, ob der betreffende Zusammenhang als „Prinzip“ bezeichnet werden sollte. Während im amerikanischen Sprachraum die Bezeichnung *„uncertainty principle“* für Gleichung (1) weit verbreitet ist, wird sie in der deutschsprachigen Literatur in der Regel (Heisenbergsche) Unschärfe- oder Unbestimmtheitsrelation genannt. Auch Heisenberg selbst sprach praktisch nie von einem „Prinzip“. Sofern es sich dabei nur um verschiedene Sprechweisen handelt ist die Frage sicherlich wenig relevant. Jedoch schwingt in der Bezeichnung „Prinzip“ ein behaupteter logischer Vorrang mit. Beginnend mit Hermann Weyl [6] und Wolfgang Pauli [7] stellten viele Lehrbuchautoren die Unbestimmtheit in der Quantenmechanik an den Beginn ihrer Darstellung. Das Lehrwerk zur Theoretischen Physik von Landau und Lifschitz [8] folgt wie viele andere diesem Beispiel und beginnt in Kapitel 1 mit §1, der „Das Unbestimmtheitsprinzip“ überschrieben ist. Darunter wird hier allgemein verstanden, dass Quantenobjekten keine Bahn zugeordnet werden kann, also etwa im Doppelspaltversuch mit Elektronen die Frage, durch welchen Spalt ein Elektron dringt, nicht beantwortet werden kann, ohne das Interferenzmuster zu zerstören. Dieses „Unbestimmtheitsprinzip“ soll dann seinen formalen bzw. mathematischen Ausdruck in der „Unschärfe-“ bzw. „Unbestimmtheitsrelation“ Gleichung (1) finden. In Abschnitt 5 werden wir zeigen, dass die Analyse des Doppelspaltversuchs mit Gleichung (1) gerade *nicht* gelingt.

3 Fachwissenschaftliche Hintergründe

In der Regel macht man keinen Fehler, wenn man sich zunächst einen Überblick über die fachwissenschaftliche Seite des Problems verschafft. In Lehrbüchern der Quantenmechanik, deren mathematischer Apparat das Schulniveau natürlich weit überschreitet, findet man typischerweise folgende Formulierung der Unschärferelation (etwa [9] als eines von ungezählten Beispielen):

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \qquad (2)$$

Hier sind *A, B* hermitesche Operatoren, $\Delta A = \sqrt{\langle A - \langle A \rangle \rangle^2}$ die Standardabweichung mit $\langle \cdot \rangle$ dem Erwartungswert bezüglich eines beliebigen normierten Zustandes. Der Kommutator zwischen Orts- und Impulsoperator hat den Wert $[x, p_x]$= $x \cdot p_x - p_x \cdot x = i \frac{h}{2\pi}$ und damit folgt Gleichung (1) als Spezialfall [9, S. 100] – mit „Δx“ und „Δp“ als Standardabweichungen. Diese äußerst elegante Formulierung der Unschärferelation, die die Unschärfe mit der Nichtvertauschbarkeit verknüpft, wurde von Robertson bereits 1929 angegeben. Jan Hilgevoord und Jos Uffink haben diese Standardformulierung jedoch kenntnisreiche kritisiert [10]. Unter anderem bemängeln sie die Wahl der Standardabweichung als Streumaß sowie die Tatsache, dass die Energie-Zeit Unschärfe von dieser Formulierung nicht erfasst werden kann. Wir werden in Folgenden noch auf diese Kritik zurückkommen.[1]

Zunächst halten wir fest, dass die Standardformulierung (Gleichung 2 bzw. Gleichung 1 als Spezialfall davon) zum Ausdruck bringt, dass die Unschärfe nichts mit einer tatsächlichen Messung und der damit verbundenen „Störung“ der konjungierten Größe zu tun hat, denn diese Faktoren gehen bei der Herleitung gar nicht ein. Vielmehr bedeutet Gleichungen (1), dass kein quantenmechanischer Zustand gleichzeitig einen scharf definierten Ort und Impulswert besitzt. Die meisten Darstellungen in Schulbüchern betonen dies auch mehr oder weniger deutlich. So lesen wir etwa im Metzler [11, S. 401]: „Für die Genauigkeit der gleichzeitigen Messung komplementärer Größen gibt es eine prinzipielle Grenze, die eine Eigenschaft der Mikroobjekte ist“. Die Formulierung: „Ort und Impuls können nie gleichzeitig exakt bestimmt werden“ [12, S. 240] lässt aber unnötigen Interpretationsspielraum, welche Bedeutung der experimentellen Bestimmung zukommt. Der Hinweis auf die Schwierigkeit der *gleichzeitigen* Bestimmung der konjungierten Größen ist ebenfalls problematisch, wie wir gleich sehen werden.

Aber es bleibt natürlich richtig, dass jede Messung *auch* eine Störung des Systems bedeutet. Dies sollte jedoch nicht als *Begründung* für die quantenmechanische Unschärfe (vom Typ A) angesehen werden, sondern kann eine Rolle bei der experimentellen *Überprüfung* dieser Vorhersage spielen. In der Originalarbeit Heisenbergs von 1927 [4] wird diese Unterscheidung nicht streng getroffen, weil Heisenberg (zumindest zu diesem Zeitpunkt) die „Bedeutung“ bzw. „Definition“ einer Eigenschaft mit seiner „Messbarkeit“ praktisch gleichsetzte (siehe [4, S. 174] und [13, S. 68f]). Jedoch ist zu beachten, dass die experimentelle Überprüfung auch so erfolgen kann, dass eine Störung der konjungierten Größe gar nicht möglich ist. Etwa kann man zunächst eine Anzahl identischer Zustände präparieren und an je einer Hälfte des Ensembles anschließend eine Orts- bzw. Impulsmessung durchführen. Die Ergebnisse streuen gemäß Gleichung (1) obwohl an jedem Element des Ensembles nur *eine* Messung durchgeführt wurde. Die dadurch vorgeblich verursachte „Störung“ der konjungierten Größe kann hier also keine Rolle spielen und der Hinweis auf die nicht „gleichzeitige Bestimmbarkeit“ beschreibt den Sachverhalt ebenfalls nicht, denn schließlich werden an keinem Objekt *beide* Größen gemeinsam bestimmt.

Im Sinne der in Abschnitt 2 eingeführten Unterscheidung von drei verschiedenen Typen von Unschärferelationen kann jedoch auch anders argumentiert werden: Gleichung (2) formalisiert den oben eingeführten Typ A einer Unschärferelation. Der Hinweis auf das Problem der gemeinsamen Messbarkeit verweist auf den Typ B einer Unschärferelation und schließlich gehören alle Argumente, die mit der Störung

[1] Man beachte ebenfalls, dass diese Beziehung zustandsabhängig ist. Betrachtet man etwa einen Eigenzustand von A (oder B) verschwindet der Erwartungswert, obwohl der Kommutator nicht Null ist. Gleichzeitig verschwindet in diesem Fall die Standardabweichung und Gleichung (2) formuliert gar keine Einschränkung [10, S. 129].

durch den Akt der Messung arbeiten, zu „error-disturbance relations“ vom Typ C. Hier handelt es sich also nicht um per se falsche Argumente. Zu bemängeln ist lediglich, wenn diese verschiedenen Typen von Unbestimmtheitsrelationen nicht unterschieden oder miteinander verwechselt werden. Wie bereits erwähnt, werden wir uns im Folgenden auf den Typ A konzentrieren, obwohl bei der Diskussion einiger klassischer Beispiele auch die „Störungsvorstellung“ eine Rolle spielt.

Während Heisenberg 1927 noch kein formale Herleitung von Gleichung (1) angibt und im Besonderen die „Streuung“ Δx noch nicht exakt definiert (er schreibt an einer Stelle, Δx sei „etwa der mittlere Fehler“ von x [4, S. 175]), wurde die Ungleichung in der Form (1) von Kennard noch im selben Jahr mit Hilfe der Fourier-Transformation bewiesen. Im Folgenden verwendete auch Heisenberg (etwa in der Chicago Vorlesung von 1929 [14]) diese Gleichung als „exakte mathematische Formulierung“ seiner Unschärferelation. Hier bezeichnet Δx also die Standardabweichung und dieses Streumaß scheint eine gewisse Natürlichkeit zu haben, wenn man die Ursache der Unschärfe tatsächlich mit dem Vorgang der Messung in enge gedankliche Verbindung bringt. Messfehler folgen ja häufig einer gaußförmigen Verteilung und für diese ist die Standardabweichung ein sinnvolles und übliches Streumaß.

Die meisten Schulbücher (etwa [11,12,15,16]) zitieren die Unschärferelation in der Form von Gleichung (1), also *mit* dem Faktor$\frac{1}{4\pi}$, obwohl sie das verwendete Streumaß nicht genauer definieren. In [12, S. 240] wird zum Beispiel von einer „mittleren Unbestimmtheit $\overline{\Delta x}$“ und im Kuhn [15, S. 326] von einer „mittleren Streuung Δx“ gesprochen. Eine Ausnahme bildet Dorn-Bader [17, S. 430], der zunächst die Beziehung $\Delta x \Delta p_x \approx h$ einführt und Gleichung (1) erst im Zusammenhang mit Wellenpaketen zitiert. Auch hier jedoch fällt der Begriff „Standardabweichung“ nicht. Die exakte Gleichung (1) einzuführen, ohne alle ihre Elemente eindeutig und operational zu definieren, ist sicherlich ungeschickt. Im Folgenden wollen wir unter „Δ“ immer die Standardabweichung verstehen. Wir verwenden die Bezeichnung „δ“ für andere Unbestimmtheitsmaße, die im jeweiligen Kontext eingeführt bzw. abgeschätzt werden.

4 Die Motivation der Unschärferelation am Einfachspalt

Natürlich kann Gleichung (2) innerhalb der Schulphysik nicht behandelt werden. Somit kann auch der Spezialfall (Gleichung 1) lediglich motiviert und plausibel gemacht werden. Eine gründliche Übersicht über die verschiedenen Strategien geben Müller und Wiesner in [18]. Häufig wird die Beugung eines Elektronenstrahls mit Impuls $|\boldsymbol{p}| = p$ am Einfachspalt betrachtet (siehe Abb. 1, dieses Beispiel geht auch auf Heisenberg [9, S. 23] zurück). Das Argument lautet etwa im Metzler [11, S. 397]: Die Ortsunschärfe ist gleich der halben Spaltbreite $\delta x = d/2$, während die Impulsunschärfe durch das Minimum der 1. Ordnung am Schirm abgeschätzt werden kann (diese δp-Abschätzung ist sinnvoll, da z. Bsp. mit den Parameterwerten aus Abb. 2 ein Flächenanteil von ca. 90% im Hauptmaximum liegt). Aus $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$ für den Winkel des 1. Minimums, der de Broglie Beziehung $p = \frac{h}{\lambda}$ und $\sin\alpha = \frac{\delta p_x}{|p|}$ folgt:

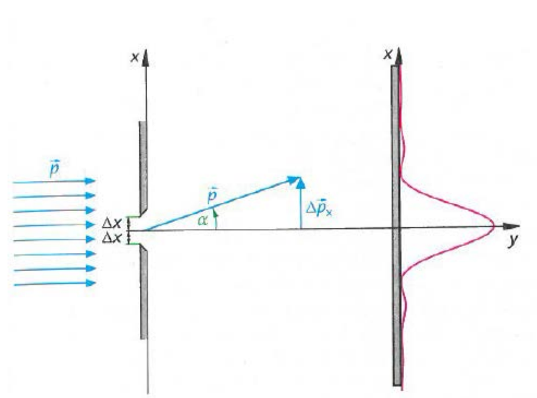

Abb. 1 Plausibilitätsbetrachtung zur Unschärferelation zwischen Ort und Impuls (aus [11, S. 397]). Die hier mit „Δ“ gekennzeichneten Größen werden in unserem Text mit „δ“ bezeichnet.

$\delta x \cdot \delta p_x \geq \frac{h}{2}$. Vollkommen zu Recht genügen an dieser Stelle ein numerisches Ergebnis in der richtigen Größenordnung sowie das (anscheinend) erwünschte qualitative Verhalten zwischen Orts- und Impulsunschärfe. Allerdings ist die Herleitung fachlich und fachdidaktisch nicht unproblematisch. Müller und Wiesner [18] haben darauf hingewiesen, dass aus $\delta p_x = |p| \cdot \sin\alpha$ eine obere Schranke für die Impulsschärfe folgt ($\delta p_x \leq |p|$). Diese Größe kann also gar nicht beliebig anwachsen und ab $\delta x < \frac{\lambda}{2}$ (also einer Spaltbreite unterhalb der Wellenlänge) wird die Unschärferelation sogar verletzt. Außerdem unterstützt dieses Argument die Fehlvorstellung von Teilchenbahnen zwischen Spalt und Schirm – man betrachte nur die suggestive Abbildung 1, bei der der Impulspfeil $\vec{p}$ die Existenz einer entsprechenden Teilchenbahn für das Elektron nahelegt. Wir wollen das Augenmerk jedoch noch auf einen anderen Punkt lenken: Die Impulsunschärfe wurde bei obigem Argument durch die (halbe) Breite des Hauptmaximums abgeschätzt – und nicht durch die Standardabweichung. Erstaunlicherweise kann dieses System mit Hilfe von Gleichung (1) auch nicht sinnvoll analysiert werden: Setzt man etwa als Ortswellenfunktion am Spalt eine Rechteck-Funktion: $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ für $|x| \leq a$ und Null sonst (a ist also die halbe Spaltbreite d), ergibt sich durch Fourier-Transformation die folgende Wellenfunktion im Impulsraum: $\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x) e^{-ipx} dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{\sin(ap)}{ap}$. Gemäß der intuitiven Erwartung ist die Breite des Hauptmaximums der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\phi(p)|^2$ für den Impuls (siehe Abb. 2, gestrichelte Linie) umgekehrt proportional zur Spaltbreite $d = 2a$. Man beachte, dass die (quadrierte) Wellenfunktion im Impulsraum gerade der räumlichen Beugungsfigur am Einzelspalt entspricht (Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein für die Fraunhofer-Beugung, d.h. die Beugungsfigur im Fernfeld ist gleich der Fouriertransformierten der beugenden Struktur). Bemerkenswert ist nun aber folgende Beobachtung: Während die Standardabweichung für den Ort endlich ist und in Größenordnung der Spaltbreite liegt ($\Delta x = \frac{d}{\sqrt{12}}$), divergiert die Standardabweichung des Impulses: $\Delta p = \sqrt{\int p^2 |\phi(p)|^2 dp} = \infty$. Dies erkennt man im Übrigen auch ohne Rechnung: Bei der Definition der Standardabweichung geht ein p^2-Term ein während der Ausdruck $|\phi(p)|^2$ nur wie $\frac{1}{p^2}$ fällt. Über die gesamte reelle Achse integriert muss dieser Ausdruck also unendlich sein. Dies gilt, obwohl fast die gesamte Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Hauptmaximum konzentriert ist (vgl. Abb. 2). Vollständig unintuitiv ist diese Eigenschaft auch deshalb, weil für $a \to \infty$ die Verteilung $|\phi(p)|^2$ sogar zu einer „δ-Funktion" wird. Durch dieses Ergebnis wird die Ungleichung (1) natürlich nicht verletzt, aber irrelevant. Durch eine Modifikation der Ortswellenfunktion kann dieses Problem ad hoc behoben werden (etwa durch einen Verzicht auf die unstetigen Kanten des Spalts), aber das Grundproblem bleibt bestehen: der p^2-Term in der Definition der Standardabweichung sorgt für eine starke Gewichtung der Flanken und dadurch ist die Standardabweichung für viele Verteilungen ein ungeeignetes Maß für die Breite der Verteilung. Dieses Argument lässt sich auch auf das be-

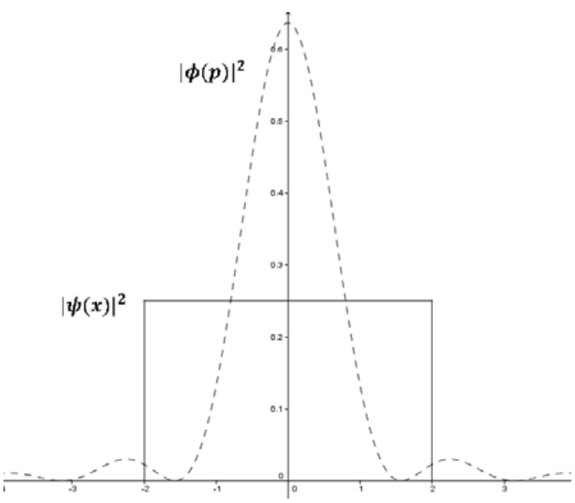

Abb. 2 Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort $|\psi|^2$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls $|\phi|^2$ (gestrichelte Linie) am Einzelspalt (a=2).

rühmte Heisenbergsche γ-Strahl Mikroskop ausdehnen. Tatsächlich ist dieses Gedankenexperiment ja auch mathematisch äquivalent zur Beugung am Einzelspalt, denn hier wirkt die Apertur des Mikroskops als beugende Struktur und das Rayleigh-Kriterium für den noch trennbaren Winkel entspricht dem 1. Beugungsminimum $\sin \alpha = \frac{\lambda}{d}$. Mithilfe von Gleichung (1) kann also noch nicht einmal Heisenbergs Paradebeispiel für die Unschärferelation analysiert werden.

Ein Unbestimmtheitsmaß anzugeben, das weniger stark die Flanken gewichtet und tatsächlich die Breite der Verteilung misst, die einen Großteil der von ihr begrenzten Fläche abdeckt, ist tatsächlich nicht schwierig. In [2] wird vorgeschlagen, dass kleinste Intervall $W(\alpha)$ auszuzeichnen, in dem der Anteil α (z. Bsp. $\alpha = 0{,}9$) der Fläche der Verteilung liegt. Für den Ort heißt das:

$$\int_{x_0-\frac{W_x}{2}}^{x_0+\frac{W_x}{2}} |\psi(x)|^2 dx = \alpha \qquad (3)$$

Diese Größe nennen Uffink und Hilgevoord [10] „overall width“ (wir wollen sie im Folgenden „totale Breite“ nennen). Eine analoge Kenngröße W_p kann für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses definiert werden. Diese Definition einer Unschärfe ist äußerst intuitiv und mag vielleicht sogar trivial erscheinen. Allerdings ist die Frage, ob zwischen den so definierten Größen eine Unbestimmtheitsrelation besteht, damit natürlich noch gar nicht entschieden! Dieser Beweis wurde erst 1961 von Landau und Pollak [19] angegeben. Sie konnten zeigen, dass für Variablen, die durch eine Fourier-Transformation verknüpft sind (und bei $\alpha > \frac{1}{2}$) tatsächlich die Unbestimmtheitsrelation:

$$W_x \cdot W_p \geq h \cdot (2\alpha - 1)^2 \qquad (4)$$

gilt. Es handelt sich bei dem Erstautor von [19] übrigens nicht um den sowjetischen Physiker Lew Landau, sondern um den amerikanischen Mathematiker Henry Landau, der zusammen mit Henry Pollak bei den Bell Laboratorien arbeitete. Dieses Resultat wurde also kurioserweise im Kontext der Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik gewonnen.

Dass die übliche Formulierung der Unschärferelation (Gleichung (1)) zu schwach ist, um die Beugung am Einfachspalt zu analysieren, und diese Beispiele für das Unschärfeprinzip erst über 30 Jahre nach seiner semi-klassischen Behandlung formal gelöst wurde, ist sicherlich erstaunlich. Jedoch erscheint Gleichung (4) als eine eher kleine Modifikation von Beziehung (1). Wenn wir uns nun dem Doppelspalt zuwenden, werden wir erkennen, dass hier zusätzlich ein vollständig anderer Typ von „Unbestimmtheit“ auftritt. Dadurch wird die Interpretation der „Unschärferelation(en)“ weiter verdeutlicht.

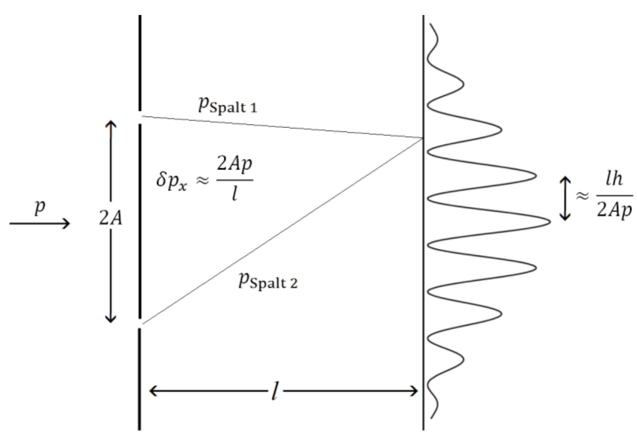

Abb. 3 Illustration des Argumentes von Bohr zur Anwendung der Unschärferelation am Doppelspalt.

5 Die Unschärferelation und der Doppelspalt

In Abschnitt 2 hatten wir erwähnt, dass die Interferenz am Doppelspalt von z. Bsp. Elektronen und die Unmöglichkeit, diesen Objekten innerhalb der üblichen Quantenmechanik eine Bahn zuzuordnen, von einigen Autoren als Beispiel für das „Unschärfeprinzip" angesehen wird. Die Frage lautet also, ob es möglich ist, den Spalt zu bestimmen, durch den ein Elektron dringt und dennoch Interferenz am Schirm zu beobachten. Der Vorschlag für ein solches Experiment zur Widerlegung der Quantenmechanik wurde 1927 von Einstein gemacht und von Bohr zurück gewiesen [20]. Die Grundidee Bohrs beruht dabei auf der Anwendung der Unschärferelation auf die Geräte der Anordnung selbst (Spalt oder Schirm) und *nicht* auf die Elektronen. In leicht abgewandelter Form lautet die Argumentation von Bohr: Um auf die Spaltöffnung zu schließen, durch die das Elektron gedrungen ist, schlägt Einstein eine Impulsmessung an eben diesem Spalt vor (er sei zu diesem Zweck an einer Feder befestigt, dessen Auslenkung gemessen werden kann). Je nach durchquertem Spalt kommt es nämlich zu einer Differenz des Transversalimpulses des Teilchens, die $\approx \frac{2Ap}{l}$ beträgt (mit den Bezeichnungen wie in Abb. 3). Der Spaltimpuls P_x muss also eine *geringere* Unschärfe besitzen. Aus $\delta X \cdot \delta P_x \geq h$ folgt somit $\delta X \geq \frac{lh}{2Ap}$. Diese notwendige Unbestimmtheit der Spalt-Position X ist jedoch *größer* als der Abstand der Interferenzstreifen. Daraus folgt, dass diese „ausgewaschen" werden, d.h. nicht mehr beobachtbar sind. Man erkennt, dass die Argumentation auf der Abhängigkeit von der Längenskala A beruht (Spaltabstand $\sim A$ und Interferenzstreifenbreite $\sim \frac{1}{A}$).

Prüfen wir erneut, ob dieses semi-klassische Argument mit Hilfe von Beziehung (1) formalisiert werden kann. Konzeptionell ist es leichter, die Unschärferelation auf die Teilchen selbst anzuwenden – und nicht auf den Spalt bzw. Schirm. Zur mathematischen Analyse wählen wir erneut eine Rechteckfunktion für die Ortsverteilung am Spalt. Die Impulsverteilung ergibt sich ebenfalls durch Fourier-Transformation und entspricht natürlich wieder dem räumlichen Interferenzmuster am Schirm (siehe Abb. 4). Wir verzichten diesmal auf die Angabe der mathematischen Ausdrücke. Wie im Falle des Einzelspalts bezeichnet a die halbe Spaltbreite. Nun tritt die bereits erwähnte zusätzliche Längenskala A auf, nämlich der halbe Abstand zwischen den Spaltzentren. Ebenfalls in Abb. 4 eingezeichnet ist das Quadrat der Fouriertransformierten des Einzelspalts, also die Einhüllende der Impulsverteilung am Doppelspalt.

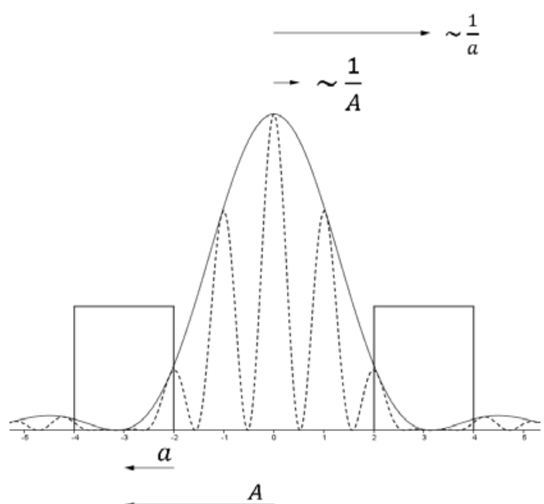

Abb. 4 Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort $|\psi|^2$ (Kastenfunktion) und den Impuls $|\phi|^2$ (gestrichelte Kurve) am Doppelspalt. Die Einhüllende der gestrichelten Linie ist die Impulsverteilung des Einzelspalts (mit: a=1 und A=3).

Um den Spalt zu bestimmen, durch den das Elektron dringt, muss die räumliche Unbestimmtheit am Spalt kleiner als die Spaltbreite sein: $\delta x < 2A$. Diese Bedingung erfüllen sowohl die Standardabweichung von $|\psi|^2$ als auch die totale Breite $W_x(\alpha)$ (wenn für α eine sinnvolle Wahl getroffen wird). Die Interferenzfigur ist jedoch nur dann sichtbar, wenn die Impulslauflösung unterhalb der Breite der Interferenzstreifen liegt (wir sprechen von „Interferenzstreifen" obwohl wir hier natürlich nicht die räumliche Verteilung, sondern die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum beschreiben). Die Standardabweichung ist natürlich immer noch ungeeignet (auch hier gilt $\Delta p = \infty$), aber das Streumaß $W_p(\alpha)$ ist ebenfalls nicht sensitiv auf diese Größe, da es mit $\frac{1}{a}$ skaliert, also die Breite der *Einhüllenden* misst. Gesucht wird hier jedoch ein Maß für die *Feinstruktur* des Interferenzmusters. Für diese Größe haben wir noch keine Kenngröße und in diesem Sinne kann das Bohrsche Argument gar nicht mit Hilfe der Unschärferelation (1) formalisiert werden. In Uffink und Hilgevoord [21, S. 943] wird zu diesem Zweck die Kenngröße „Translationsbreite" w eingeführt. Ihre genaue Definition ist etwas technisch und verwendet die Autokorrelationsfunktion der Verteilung. Vereinfacht ausgedrückt handelt es sich bei w um das kürzeste Intervall, um das eine Verteilung verschoben (daher die Bezeichnung) werden muss, um von der ursprünglichen (d.h. nicht verschobenen Verteilung) unterschieden werden zu können. Diese Breite ist also nach dem Vorbild des Auflösungsvermögens (etwa in der Optik) modelliert. Für Funktionen mit nur *einem* ausgeprägten Maximum (z. Bsp. die Impulsverteilung beim Einfachspalt) fallen die beiden Kenngrößen W_p und w_p (man beachte die Groß- und Kleinschreibung!) zusammen. Im Falle des Doppelspalts gilt hingegen $w_p \sim \frac{1}{A}$. Die Güte der Auflösung kann bei dieser Kenngröße durch einen Parameter β quantifiziert werden. Unter der Bedingung $\beta \leq 2\alpha - 1$ beweisen Uffink und Hilgevoord [21] die folgende Unschärfebeziehung für Größen, deren Verteilungen durch eine Fourier-Transformation miteinander verknüpft sind:

$$W_x \cdot w_p \geq C'(\alpha, \beta) \qquad (5)$$

Hier bezeichnet $C'(\alpha, \beta) = \frac{h}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}\right)$. Wählt man etwa $\alpha = 0{,}95$ und $\beta = 0{,}75$ liegt C' in der Größenordnung von $\frac{h}{2\pi}$. Die Gleichung (5) hat eine strukturelle Ähnlichkeit mit der aus der Optik bekannten Beziehung zwischen der Weite der Apertur ($\sim W_x$) und dem Auflösungsvermögen des optischen Gerätes ($\sim w_p$). Im Übrigen wird hier exakt das Bohrsche Argument formalisiert: eine Vergrößerung des Spaltabstandes verkleinert den Abstand der Interferenzstreifen und umgekehrt.

Dieses Ergebnis kann nun in einen größeren Zusammenhang gestellt werden, denn die verschiedenen Kenngrößen entsprechen auch zwei verschiedenen Begriffen von „Unbestimmtheit" bzw. „Wahrscheinlichkeit". Diese beiden Bedeutungen sind aus anderen Kontexten von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wohl bekannt: Es kann (i) bei bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgang einer Messung vorausgesagt werden, oder es kann (ii) aus dem Ausgang einer Messung auf die zugrunde liegende (unbekannte) Verteilung geschlossen werden.

Das Maß W (totale Breite) ist nun eine typische Kenngröße zur Quantifizierung einer Wahrscheinlichkeit im Sinne von (i). Je kleiner das Intervall W ist, desto sicherer kann ein Ereignis, dass mit der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt ist, vorausgesagt werden. Die „Translationsbreite" quantifiziert hingegen eine Wahrscheinlichkeit im Sinne (ii). Hier wird versucht, von einem Messergebnis auf die Verteilung zu schließen, und dies gelingt umso genauer, je geringer die „Überschneidung" (also je größer die Unterscheidbarkeit) zwischen den alternativen Verteilungen (oder in der Sprache der Quantenmechanik: zwischen den Zuständen) ist.

Bei der Beugung am Einzelspalt liegt der Fall (i) vor, d.h. das Streumaß „totale Breite" Wgestattet, den Ausgang einer Messung vorauszusagen und die Gleichung (4) ist in diesem Sinne eine Aussage über das, was gleichzeitig *vorausgesagt* werden kann [10, S. 129]. Konkret quantifiziert Gleichung (4), dass die Güte von Orts- und Impulsvorhersage nicht gemeinsam beliebig hoch sein kann. Wie in Abschnitt 3 erläutert, muss auf die tatsächliche *Messung* dabei nicht rekurriert werden.

Bei der Analyse des Unschärfeprinzips am Doppelspalt müssen jedoch *beide* Bedeutungen betrachtet werden: die Ortsunschärfe $W_x \sim A$ ist eine Unschärfe in dem Sinne der Vorhersage eines Messausgangs. Diese Vorhersage wird umso genauer, je kleiner die totale Weite der Ortsverteilung ist, d.h. je stärker die möglichen Messausgänge konzentriert sind. Die Impulsunschärfe $w_p \sim \frac{1}{A}$ hingegen misst die Breite der Feinstruktur der Impulsverteilung und gestattet keinen Schluss auf die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Impulswert zu messen. Schließlich konzentriert sich im Intervall w_p um das Maximum gar kein großer Teil der Fläche unter der der $|\phi|^2$-Verteilung (Für die Parameterwerte aus Abb. 4 liegt z. Bsp. nur eine Fläche von einem Drittel im Hauptmaximum). Vielmehr ist die Unschärfe hier mit der Genauigkeit verknüpft, auf den quantenmechanischen Zustand zu schließen – etwa auf die Richtung des einlaufenden Strahls. Zu beachten ist, dass dieser Typ einer Unschärfe (im Jargon dieses Arbeitsgebietes „state estimation“ genannt) von der Klassifikation aus Abschnitt 2 nicht erfasst wird. Hier liegt ein Gegenstand aktueller Forschung [22].

Ironischerweise umgehen die Schulbücher diese Probleme durch die Vermeidung der genauen Definition des Streumaßes. Da jedoch, wie bereits erwähnt, fast alle Schulbücher die Gleichung (1) mit dem Faktor $\frac{1}{4\pi}$ zitieren, scheint es sich hierbei lediglich um einen glücklichen Zufall zu handeln. Auch beim nächsten Punkt werden wir der kuriosen Situation begegnen, dass der schulische Verzicht auf den mathematischen Apparat der Quantentheorie dazu führt, verbreitete Missverständnisse bei seiner Interpretation zu vermeiden.

6 Die Unschärferelation zwischen Energie und Zeit

Schul- und Hochschullehrbücher führen neben der Impuls-Orts-Unschärfe ebenfalls eine analoge Beziehung für Energie und Zeit ein:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}. \qquad (6)$$

In [15, S. 345] sogar mit dem Faktor $\frac{1}{4\pi}$, in vielen anderen Schulbüchern meist in der Form „$\Delta E \Delta t \geq h$“. Bekanntes Beispiele für die Anwendung der Gleichung (6) sind etwa der Zusammenhang zwischen Linienbreite (ΔE) und Lebensdauer (Δt) eines Zustandes. Allerdings erkennt man einen abweichenden Charakter dieser Beziehung, denn die Größe Δt ist hier ja keine „Unschärfe“ oder „Ungenauigkeit“, sondern die „Dauer“ eines Zustandes (die in der Regel übrigens extrem genau bekannt ist). Die Hochschultexte (aber auch Müller und Wiesner in [23]) beeilen sich deshalb auch darauf hinzuweisen, dass die Beziehung (6) einen konzeptionell vollständig anderen Status als Gleichung (1) hat. Der Grund liege darin, dass die Energie-Zeit-Unschärfe nicht als Spezialfall aus Gleichung (2) folgt, da es keinen „Zeitoperator“ gibt. Diese angebliche Asymmetrie zwischen Ort (für den es einen Operator gibt) und Zeit wird in vielen Darstellungen der Quantenmechanik als besonderes Merkmal hervorgehoben. Jedoch hat Jan Hilgevoord [24] darauf hingewiesen, dass es sich hier tatsächlich um einen Kategorienfehler handelt. Tatsächlich ist der Ortsoperator q die dynamische Variable eines materiellen Objektes. Dieser beschreibt den Ort dieses Objektes *in* Raum (und Zeit) und darf mit den Raumpunkten selber (etwa durch kartesische ten x, y, und z gekennzeichnet) nicht verwechselt werden. Aus diesem Grunde ist die Schreibweise „Δq“

dem verbreiteten „Δx“ auch vorzuziehen, um die Verwechslung nicht noch zu provozieren. Unsere eigene Darstellung hat sich bisher ebenfalls dieser verbreiteten aber irreführenden Notation angepasst. Einen Zeitoperator gibt es nun in der Quantenmechanik genau so wenig, wie einen universellen „Raumoperator“, denn weder Raum-Koordinaten noch die Zeit-Koordinate sind quantisiert. Eine Verwechslung dieser Konzepte kann nun leicht durch die häufig betrachteten „Punktteilchen“ entstehen, bei denen der Ort tatsächlich genau einem Raumpunkt entspricht.

Die Herleitung der oben erwähnten Unschärfe zwischen Lebensdauer δt und Linienbreite δE kann nun in vollständiger Analogie zu Gleichung (5) erfolgen [10, S. 133]. Erneut ist die Standardabweichung ein untaugliches Maß, da sie z. Bsp. für eine typisches Energiespektrum („Breit-Wigner Verteilung“) divergiert. Für die Energieverteilung eines Zustandes kann jedoch genauso wie für die Ortsverteilung eine totale Breite definiert werden. Die Zeitunschärfe kann wie der Impuls im Doppelspaltversuch als „Translationsbreite“ definiert werden – hier jedoch auf eine Translation in der Zeit bezogen. Inhaltlich bedeutet dies, dass diese Translationsbreite die Zeit misst, in der der Zustand mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit noch *nicht* zerfallen ist. Diese Definition nimmt gar keinen Bezug auf die Operatorwertigkeit der betreffenden Größe und leidet deshalb auch nicht an der Tatsache, dass es keinen universellen Zeitoperator gibt.

Der komplexe Gegenstand der Energie-Zeit-Unschärfe ist damit jedoch nur angerissen. Grundsätzlich müssen die betrachteten Systeme gesondert analysiert werden und es lassen sich eine ganze Reihe verschiedener Typen von Unschärferelationen zwischen den jeweiligen Energie- und Zeitskalen angeben; siehe etwa [24,25]. Gleichzeitig jedoch sind einige (auch in Schulbüchern) verbreitete Deutungen der Beziehung (6) unhaltbar: Die Behauptung, dass die Genauigkeit einer Energiemessung in einer Unbestimmtheitsbeziehung zur Messdauer steht (im Sinne von „je kürzer die Messung, desto ungenauer das Ergebnis“) ist unzutreffend [25, S. 77ff] und die oft behauptete Möglichkeit, die Energieerhaltung für kurze Zeit zu verletzen, ist ebenfalls unzutreffend [24, S. 1455].

7 Zusammenfassung

Unter der Bezeichnung „Heisenbergsche Unschärferelation“ fasst man verschiedene zusammenhängende aber sinnvoll zu unterscheidende Typen von Ungleichungen zusammen, die prinzipielle Grenzen der Präparation bzw. Messung an quantenmechanischen Systemen beschreiben. Unsere Darstellung hat sich auf den Typ A konzentriert (vgl. Abschnitt 2). Hier ist die Unschärferelation grundsätzlich eine Aussage über die Grenzen der Präparation bzw. Voraussagbarkeit von Messergebnissen. Anders formuliert: in der Quantenmechanik *gibt* es keine Zustände, die gleichzeitig einen exakten (z. Bsp.) „Ort“ und „Impuls“ haben. Gleichzeitig zeigt die Diskussion der Unschärfe am Doppelspalt, dass der Schluss von einer Messung auf den zugrunde liegenden Zustand ebenfalls einer prinzipiellen Unbestimmtheit unterliegt.

Mithilfe der mathematisch einfach zu definierenden Standardabweichung wurden bereits Ende der 20er Jahre allgemeine Formulierungen dieses Zusammenhangs bewiesen. Allerdings zeigt sich, dass mit dieser Formalisierung die quantitative Diskussion z. Bsp. der Beugung an Einfach- und Doppelspalt nicht gelingt. In diesem Sinne ist Gleichung (1) (bzw. für beliebige Operatoren Gleichung (2)) keine allgemeine Form, das „Unschärfeprinzip“ auszusprechen und andere sinnvolle „Streu-“ bzw. „Unbestimmtheitsmaße“ müssen (und können) in den jeweiligen Situationen eingeführt werden. Schließlich ist es irreführend, der

Energie-Zeit Unschärfe einen grundsätzlich anderen Status einzuräumen. Dynamische Größen, die einen einfachen Zusammenhang zur Größe „Zeit“ haben, können für die Formulierung vollwertiger Unschärfe-relationen zwischen diesen Größen verwendet werden (Systeme, deren dynamische Größen diese Eigenschaft haben, werden umgangssprachlich als „Uhren“ bezeichnet). In anderen Fällen spielen die alternativen Unbestimmtheitsmaße, die bei der Behandlung von Einzel- und Doppelspalt eingeführt wurden, eine wichtige Rolle.

Diese umfangreiche Klärung fachlicher Fragen ist eine sinnvolle Voraussetzung für die didaktische Analyse. Wir stellen fest, dass die schulbuchübliche Praxis, auf eine exakte Definition des Streumaßes zu verzichten, einen (vermutlich) glücklichen Zufall darstellt. Durch den in der Schulphysik natürlich notwendigen Verzicht auf Hilbertraum-Operatoren und Erwartungswerte erliegt die unterrichtliche Darstellung nicht dem Fehler, in der eleganten Operator-Beziehung (2) den allgemeinen und einzigen mathematischen Ausdruck des Unschärfeprinzips zu sehen.[2] Vor diesem Hintergrund ist eine heuristische Motivation im Sinne der frühen Heisenbergschen Originalarbeiten fachlich angemessener, als in der Regel angenommen wird. Sinnvoll kann die Unschärfebeziehung dann aber nur in der Form $\delta x \cdot \delta p \gtrapprox h$ oder $\delta x \cdot \delta p \approx h$ angegeben werden. Die Parallelisierung der Unschärfebeziehungen zwischen Ort und Impuls auf der einen Seite und typischen Energie- und Zeitskalen auf der anderen Seite, stellt ebenfalls nicht den groben fachlichen Fauxpas dar, als den es die übliche Lehrbuchdarstellung der theoretischen Physik ausgibt.

Zur Verknüpfung der Unbestimmtheitsrelation mit dem Doppelspaltexperiment und dem konzeptionellen Punkt, dass einem Quantenobjekt in der üblichen Formulierung keine Bahn zugeordnet ist, kann durchaus auf die semi-klassische Argumentation von Bohr zurückgegriffen werden. Dem Missverständnis, dass die Unbestimmtheit *nur* ein Artefakt der „Störung“ durch die Messung darstellt, kann hier wirkungsvoll begegnet werden. Der besondere Charme der Betrachtung von Einfach- und Doppelspalt liegt zusätzlich darin, dass die Interferenzfiguren der Fraunhofer-Beugung der Fourier-Transformation der beugenden Struktur entsprechen. Hier werden also tatsächlich quantenmechanische Impulsverteilungen sichtbar gemacht.

Danksagung

Wir danken Dr. Torsten Franz (Braunschweig) und Prof. Dr. Paul Busch (York) für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit.

Literatur

[1] Jung, Tobias (2015) „Philosophische Aspekte der Quantentheorie – ausgehend von der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation im Rahmen des gymnasialen Physikunterrichts der Oberstufe“ PdN Physik in der Schule 4(64) 30.
[2] Busch, Paul und Brigitte Falkenburg (2009) “Heisenberg uncertainty Relation (Indeterminacy Relations)“, in: D. Greenberger, K. Hentschel und F. Weinert (Hrsg.) “Compendium of Quantum Physics”, Springer: Berlin, Heidelberg.

[2] Deshalb ist auch dem Vorschlag Jungs zu widersprechen, der in [1] dafür plädiert, eben diese Beziehung im Unterricht zu motivieren.

[3] Busch, Paul, Teiko Heinonen und Pekka Lahti (2007) „Heisenberg's uncertainty principle", Phys. Rep. 452, 155.
[4] Heisenberg, Werner (1927) „Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", Zeitschrift für Physik 43 172-198.
[5] Busch, Paul, Pekka Lahti und Reinhard Werner (2014) "Quantum root-mean-square error and measurement uncertainty relations", Rev. Mod. Phys. Vol. 86, No. 4.
[6] Weyl, Hermann (1928) „Quantenmechanik und Gruppentheorie" , Hirzel: Leipzig.
[7] Pauli, Wolfgang (1933) „Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik", In: H. Geiger und K. Scheel (Hg.) Handbuch der Physik Bd. 24, Springer: Berlin.
[8] Landau und Lifschitz (1988) „Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. 3: Quantenmechanik", Berlin.
[9] Schwabl, Franz (2007) „Quantenmechanik (QM1) Eine Einführung" 7. Auflage, Springer: Berlin.
[10] Hilgevoord, Jan und Jos Uffink (1990) „A new view on the uncertainty principle", in: A. I. Miller (Hg.) "Sixty-Two Years of Uncertainty", Plenum Press: New York.
[11] Grehn, Joachim und Joachim Krause (Hrsg.) (2008) „Metzler Physik", 4. Auflage, Schroedel: Braunschweig.
[12] Bayer, Reinhard et al. (2007) „Impulse Physik Oberstufe", Klett: Stuttgart.
[13] Jammer, Max (1974) „The Philosophy of Quantum Mechanics", Wiley: New York.
[14] Heisenberg, Werner (1949) "The Physical Principles of the Quantum Theory", Dover Publication: New York.
[15] Kuhn, Wilfried (Hrsg.) (2000) „Kuhn Physik 2", Westermann: Braunschweig.
[16] Meyer, Lothar und Gerd Dietrich Schmidt (2006) „Physik Gymnasiale Oberstufe" (Ausgabe für Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern) Duden Verlag: Berlin.
[17] Bader, Franz (Hrsg.) (2012) „Dorn-Bader Gymnasium Gesamtband Sek II" (10. Auflage) Schroedel: Braunschweig.
[18] Müller, Rainer und Hartmut Wiesner (1997) „Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Unterricht", Physik in der Schule 35, 380.
[19] Landau, H. J. und H. O. Pollak (1961) „Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - II", Bell Syst. Tech. J. 40 (65).
[20] Bohr, Niels (1983) „Diskussionen mit Einstein über erkenntnistheoretische Probleme in der Atomphysik", in: P. A. Schilpp (Hrsg.) „Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher", Vieweg: Braunschweig.
[21] Uffink, Jos und Jan Hilgevoord (1985) „Uncertainty Principle and Uncertainty Relations", Found. of Phys. Vol. 15 No. 9, 925-944.
[22] Busch, Paul, persönliche Mitteilung (13. 5. 2015)
[23] Müller, Rainer und Hartmut Wiesner (1997) „Die Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation – Geltung, Interpretation und Behandlung im Schulunterricht", Physik in der Schule, 35, 12, S. 420-422.
[24] Hilgevoord, Jan (1996) "The uncertainty principle for energy and time", Am. J. Phys. 64(12) 1451-1456.
[25] Busch, Paul (2008) "The Time-Energy Uncertainty Relation", in: J. G. Muga et al. (Hrsg.) "Time in Quantum Mechanics", Lecture Notes in Physics, Springer: Berlin, Heidelberg.