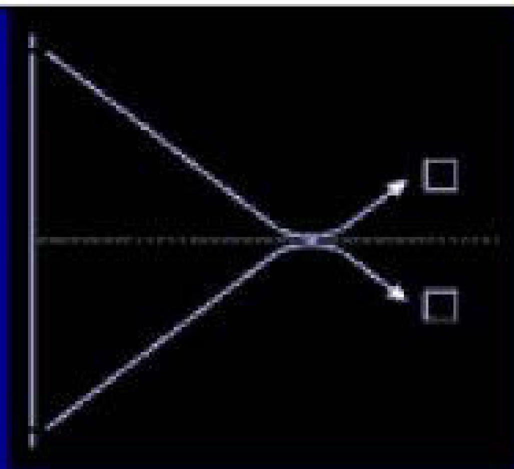

O. Passon

Bohmsche Mechanik

Eine elementare Einführung in die deterministische Interpretation der Quantenmechanik

Verlag
Harri
Deutsch

Oliver Passon

Bohmsche Mechanik

Eine elementare Einführung in die deterministische Interpretation der Quantenmechanik

Verlag Harri Deutsch

Der Autor
Oliver Passon, Jahrgang 1969, studierte Physik, Mathematik, Erziehungswissenschaften und Philosophie an der Bergischen Universität Wuppertal. Promotion 2002 in der Elementarteilchenphysik im Rahmen des DELPHI Experiments am europäischen Forschungzentrum CERN bei Genf. Nach einer Tätigkeit am Forschungszentrum Jülich arbeitet er seit 2008 als Lehrer für Mathematik und Physik am Carl-Duisberg Gymnasium in Wuppertal.

Die Webseite zum Buch
`http://www.harri-deutsch.de/1856.html`

Der Verlag
Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über `http://dnb.d-nb.de` abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1856-4

2., erweiterte und überarbeitete Auflage 2010

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>
Printed in Germany

Vorwort

Diese Arbeit bietet eine elementare Einführung in die von Louis de Broglie und David Bohm formulierte deterministische Version der nichtrelativistischen Quantenmechanik, kurz: »de Broglie-Bohm Theorie« oder »Bohmsche Mechanik«[1]. Diese Theorie reproduziert alle Vorhersagen der üblichen Quantenmechanik, erlaubt jedoch im Gegensatz zu dieser eine objektive und deterministische Beschreibung.

An Vorkenntnissen setzt unsere Darstellung lediglich Grundlagen der nichtrelativistischen Quantenmechanik voraus, wie sie Gegenstand jeder Einführungsvorlesung der Quantenmechanik sind. Auch in mathematischer Hinsicht ist eine möglichst elementare Darstellung angestrebt worden. Dieses Buch kann damit als einführende Lektüre für eine Beschäftigung mit dem stärker mathematisch orientierten Werk von Detlef Dürr [4] verwendet werden[2].

Die Bohmsche Mechanik hat bisher kaum Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden und ist dadurch weitgehend unbekannt. Wo sie doch diskutiert wird, ist der Ton häufig polemisch und an der Grenze zur Unsachlichkeit. Nicht selten verraten Bemerkungen zur Bohmschen Mechanik allerdings, dass ihr Konzept nur unvollständig verstanden wurde. Die Bohmsche Mechanik jedoch als Kuriosum abzutun, verkennt ihre konzeptionelle und wissenschaftstheoretische Bedeutung vollkommen. An dieser Stelle braucht es offensichtlich eine unaufgeregte und sachliche Darstellung, um die Auseinandersetzung von dogmatischem Ballast auf beiden Seiten zu befreien.

Dabei geht es im Kern gar nicht zuerst um die Frage, ob die Bohmsche Deutung nun tatsächlich »wahr« ist. Allein schon ihre Existenz ist eine Provokation für all jene, die vorschnelle Schlüsse über die erkenntnistheoretischen Implikationen der modernen Physik ziehen wollen. Die Beschäftigung mit Bohmscher Mechanik kann verwendet werden, um die emotionalisierte Debatte um die Deutung der Quantenmechanik zu rekonstruieren und das mit der Quantenmechanik erreichte Wirklichkeitsverständnis besser zu verstehen.

[1] Diese Theorie ist in weiten Teilen bereits 1927 von de Broglie formuliert worden [1]. Erwin Madelung hatte sogar schon 1926 ähnliche Ansätze gefunden [2]. Bohm entwickelte seine Version unabhängig davon 1952 [3]. Louis de Broglie nannte seine Formulierung »Führungsfeld Theorie«, David Bohm bezog sich auf seine Theorie als *kausale* bzw. *ontologische* Interpretation der Quantenmechanik. Wir werden im Folgenden der Kürze halber meist von »Bohmscher Mechanik« sprechen.

[2] Neben diesem Buch existieren nach Kenntnis des Autors überhaupt nur noch drei andere Darstellungen der Bohmschen Mechanik auf Lehrbuchniveau: Peter Hollands *The Quantum Theory of Motion* [5], *The Undivided Universe* von Bohm und Hiley [6] und *Quantum Mechanics* [7] von James Cushing.

Abschließend noch eine Anmerkung zur konkreten Darstellung der Theorie: In den 50 Jahren ihres Bestehens hat die Bohmsche Mechanik natürlich Umformulierungen und Weiterentwicklungen erfahren. Bohm selbst (und später etwa auch Holland [5]) wählte eine Darstellung, die vor allem durch das »Quantenpotential« die Bohmsche Mechanik in große Nähe zur klassischen Physik rückt. Darüber hinaus ist dort der genaue Status der Observablen (außer dem Ort) sowie der Quantengleichgewichtshypothese noch nicht mit abschließender Schärfe formuliert. Man kann vermuten, dass durch diesen Umstand Bohm selbst die Rezeption seiner Theorie erschwerte. In diesen Fragen folgen wir deshalb den Arbeiten von Dürr, Goldstein, Zanghì und anderen (siehe etwa [4, 8, 9, 10, 11]). Ihre Darstellung der Bohmschen Mechanik greift an vielen Stellen Ideen von John Bell auf [12], der seit den 60er Jahren zu den wenigen prominenten Physikern gehörte, die sich für die Bohmsche Mechanik eingesetzt haben. In diesem Sinne bedeutet dieses Buch also nicht den anachronistischen Versuch, eine jahrzehntealte Theorie darzustellen, sondern reflektiert im Rahmen seiner Möglichkeiten den aktuellen Forschungsstand auf diesem Gebiet.

Schließlich ist es mir eine Freude, denen meinen Dank auszusprechen, die in verschiedener Weise die Entstehung dieser Arbeit befördert haben. Dieses Projekt wäre ohne die Hilfe von Dr. Roderich Tumulka aus der *Arbeitsgruppe Bohmsche Mechanik* an der Ludwig-Maximilian-Universität München unweigerlich zum Scheitern verurteilt gewesen. In ausführlichen E-Mails und persönlichen Diskussionen hat er mir geholfen, den Gegenstand besser zu verstehen und Missverständnisse aufzuklären. Herr Prof. Dr. Detlev Dürr ermöglichte mir dankenswerterweise die Teilnahme an der Konferenz »Quantum Mechanics without Observer II« am Bielefelder ZiF. Ebenfalls sehr fruchtbar war die Teilnahme an der Frühjahrsschule »Physics and Philosophy« in Maria in der Aue. Mein Dank gilt neben allen Teilnehmern vor allem den Organisatoren PD Dr. Holger Lyre und Prof. Dr. Peter Mittelstaedt. Hier bot sich mir die Gelegenheit zu intensiven Diskussionen mit unter anderem Prof. Dr. Don Howard und Dr. Jeremy Butterfield. Danken möchte ich auch Prof. Dr. Leslie Ballentine, Prof. Dr. Claus Kiefer, Prof. Dr. Günter Nimtz und Prof. Dr. Berthold-Georg Englert, die die Freundlichkeit hatten, mir in elektronischer Korrespondenz verschiedene Fragen zum Thema dieser Arbeit zu beantworten. Die sehr gute Zusammenarbeit mit Klaus Horn und Dr. Alfred Ziegler vom Verlag Harri Deutsch möchte ich ebenfalls hervorheben.

Schließlich gilt ein besonderer Dank meiner Freundin Esther Neustadt, die nicht nur zahllose Verstöße gegen die Regeln der deutschen Rechtschreibung und Zeichensetzung beseitigte.

Die Genannten stimmen natürlich nicht notwendig allen Teilen dieses Buches zu, noch sind sie für mögliche Fehler oder Ungenauigkeiten der Darstellung verantwortlich.

Wuppertal, den 29. Oktober 2004 *Oliver Passon*

Vorwort zur 2. Auflage

Mir großer Freude nutze ich die zweite Auflage des Buches, um einige Veränderungen vorzunehmen. In zahlreichen Diskussionen hat sich immer stärker herauskristallisiert, dass die Frage bzw. Schwierigkeit der relativistischen und quantenfeldtheoretischen Verallgemeinerung als das Haupthindernis angesehen wird, in der de Broglie-Bohm Theorie mehr als ein wissenschaftstheoretisches Kuriosum zu sehen. Allerdings leidet auch hier die Diskussion darunter, dass sie selten auf der Höhe des aktuellen Forschungsstandes geführt wird. Aus diesem Grund wurde das Kaptitel 8 über den Welle-Teilchen Dualismus des Lichts durch einen kurzen Abriss der relativistischen und quantenfeldtheoretischen Verallgemeinerungen ersetzt. Dieses Kapitel beruht im Wesentlichen auf meiner Veröffentlichung »What you always wanted to know about Bohmian mechanics but were afraid to ask« (Physics and Philosophy 3 (2006)). Hier gilt mein besonderer Dank erneut Roderich Tumulka und Ward Struyve, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit durch ihre kritischen Kommentare und Diskussionen sehr geholfen haben. Für die Einladung an das Perimeter Institut möchte ich besonders Ward Struyve vielmals danken.

Aus didaktischen Gründen stellt dieses Kapitel jedoch einen Fremdkörper dar, schließlich setzt der Rest des Buches lediglich Grundkenntnisse der nicht-relativistischen Quantenmechanik voraus. Eine grundständige Einführung der Dirac-Gleichung und Quantenfeldtheorie wurde aus naheliegenden Gründen nicht angestrebt. Ich hoffe jedoch, dass auch die skizzenhafte Darstellung zusammen mit den Hinweisen auf die Originalliteratur ihren Dienst erfüllt.

Weitere größere Veränderungen am Text betreffen den Abschnitt 2.2 zur Entstehungsgeschichte der Theorie. Hier habe ich versucht unter Einbeziehung neuerer Literatur, die Rolle von Louis de Broglie angemessener zu würdigen. Ebenfalls enthält dieser Abschnitt nun eine kleine Untersuchung der Frage, welche Rolle das Messproblem bei der Entstehung der Bohmschen Mechanik spielte.

Zuletzt möchte ich noch jenen danken, die mir durch Einladungen zu Tagungen oder Seminaren die Gelegenheit boten, die Grundidee der de Broglie-Bohm Theorie vorzustellen und an ebenso kontroversen und fruchtbaren Diskussionen teilzunehmen. Hervorheben möchte ich hier Prof. Dr. Dr. Brigitte Falkenburg (Dortmund), Prof. Dr. Gregor Schiemann (Wuppertal), Dr. Rafaela Hillerbrand und Prof. Dr. Gernot Münster (Münster), Dr. Hans Behringer (Bielefeld) sowie Prof. Dr. Heinz-Jürgen Schmidt (Osnabrück). Ich hoffe, dass auch die 2. Auflage dieses Buches als Anregung zu einer Diskussion verstanden wird!

Wuppertal, den 25. Januar 2010 *Oliver Passon*

Inhaltsverzeichnis

Verlag Harri Deutsch – Passon: *Bohmsche Mechanik* – ISBN: 978-3-8171-1856-4

Verlag Harri Deutsch – Passon: *Bohmsche Mechanik* – ISBN: 978-3-8171-1856-4

4 Bohmsche Mechanik

In der Bohmschen Mechanik wird ein System nicht mehr durch die Wellenfunktion alleine beschrieben, sondern zusätzlich durch die Konfiguration, d. h. die Ortskoordinaten der »Quantenobjekte«. Diese werden also als »Teilchen« mit einem jederzeit definierten Ort aufgefasst. Die Wellenfunktion wird dabei genauso wie in der Quantenmechanik als Lösung der Schrödingergleichung gewonnen. Für die Zeitentwicklung der Teilchenorte tritt jedoch eine zusätzliche Gleichung auf, die sog. *guiding* (oder *guidance*) *equation*. Aus historischen Gründen haben diese zusätzlichen Bestimmungsstücke (nämlich die Teilchenorte) die Bezeichnung »verborgene Variable« erhalten[1].

Die Grundgleichungen der Bohmschen Mechanik sind also zum einen die Schrödingergleichung[2]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi \tag{4.1}$$

sowie die Bewegungsgleichung[3] (bzw. »guiding equation«) für den Teilchenort $Q(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{m}\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) \tag{4.2}$$

Hier bezeichnet $\Im$ den Imaginärteil. Schreibt man die Lösung der Schrödingergleichung in der Form $\psi(\mathbf{r},t) = Re^{iS/\hbar}$, findet man für diese Gleichung auch:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\nabla S(\mathbf{r},t)}{m}\Big|_{\mathbf{r}=Q} \tag{4.3}$$

Die Teilchenbewegung wird also durch die Phase S der Wellenfunktion geleitet. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung 4.3 werden wir in Abschnitt 7.1 behandeln.

[1] »verborgen« sind diese Variablen natürlich nur innerhalb des üblichen Formalismus der Quantenmechanik. In [5] argumentiert Holland, dass im Wortsinn die »verborgenen Variablen« Bohms die eigentlichen Beobachtungsgrößen sind – etwa die punkförmigen Schwärzungen der Fotoplatte im Doppelspaltexperiment. Streng genommen ist die Wellenfunktion das eigentlich »verborgene« Objekt der Quantenmechanik.

[2] An dieser Stelle beschränken wir uns zunächst auf den 1-Teilchen Fall ohne Spin. Die (nahe liegende) Verallgemeinerung behandeln wir später.

[3] Der Ausdruck *Bewegungsgleichung* ist in der klassischen Physik für eine Beziehung vom Typ $m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = F$ reserviert. Die Bahnkurve der Bohmschen Mechanik wird im Gegensatz dazu durch eine Gleichung *erster* Ordnung definiert. Trotzdem erlauben wir uns diese Sprechweise. Die konzeptionellen Unterschiede zur klassischen Mechanik werden uns noch an zahlreichen Stellen beschäftigen.

Die Teilchenbahnen sind durch diese Bewegungsgleichung natürlich erst eindeutig festgelegt, wenn konkrete Anfangsbedingungen gegeben sind. Alle statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik können reproduziert werden, wenn man für die Anfangsorte der Teilchen, die durch die Wellenfunktion ψ beschrieben werden, eine $|\psi|^2$-Verteilung wählt. Es drängt sich natürlich der Verdacht auf, dass dadurch das Deutungsproblem der Quantenmechanik nur verschoben wird. Dem Status dieser sog. Quantengleichgewichtshypothese ist deshalb ein eigener Abschnitt gewidmet (4.4).

Im Folgenden geben wir drei verschiedene Motivationen der Grundgleichung 4.3. Dieser Vergleich ist der Arbeit [9] entlehnt. Zuerst folgen wir Bohms Originalarbeit [3], dann einer Motivation nach Bell [12] und geben schließlich ein jüngeres Argument nach [10]. Alle diese Herangehensweisen haben ihre Stärken und Schwächen, und in ihrer Zusammenschau stellt sich unserer Meinung nach ein ausgewogenes Bild dar.

4.1 Motivation 1: Hamilton-Jacobi

In der 1. Motivation folgen wir der Originalarbeit Bohms [3]. Wir betrachten zunächst die Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi \tag{4.4}$$

Mit dem Ansatz $\psi(\mathbf{r},t) = Re^{iS/\hbar}$ findet man für die reellwertigen Funktionen $R(\mathbf{r},t)$ und $S(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{2m}[R\nabla^2 S + 2\nabla R\cdot\nabla S] && (4.5) \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] && (4.6) \end{aligned}$$

Diese Beziehung gewinnt man durch Trennen des Real- und Imaginärteils der Schrödingergleichung. Die gemischten Terme mit $\nabla R\cdot\nabla S$ entstehen durch Anwendung des Laplace Operators auf die Produktform des Ansatzes. Bevor wir diese Gleichungen genauer untersuchen, soll an 4.5 noch eine Umformung vorgenommen werden: Da wir wissen, dass $|\psi|^2 = R^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte eine besondere Stellung einnimmt, führen wir erstens die Bezeichnung $R^2 = \rho(\mathbf{r},t)$ ein, und leiten zweitens die Zeitentwicklung von $\rho(\mathbf{r},t)$ her. Man kann etwa die Beziehung $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 2R\frac{\partial R}{\partial t}$ sowie Gleichung 4.5 verwenden. Wir finden nach einer einfachen Rechnung schließlich:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left[\rho\frac{\nabla S}{m}\right] = 0} \tag{4.7}$$

Diese Gleichung ist aber gerade vom Typ einer Kontinuitätsgleichung für $\rho(\mathbf{r}, t)$. Dies legt die Deutung von $\nabla S/m$ als Geschwindigkeit nahe, denn dann entspricht der Klammerausdruck gerade einem »Strom«(= Dichte · Geschwindigkeit).

Eine solche Interpretation ist noch aus einem anderen Grund nahe liegend. Wir folgen weiter der Argumentation von Bohm [3] und betrachten den klassischen Grenzfall von Gleichung 4.6. In diesem Fall ist die Schwankung in R viel kleiner als die in S, und man kann den Term $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ vernachlässigen[4] [54]. Gleichung 4.6 hat dann gerade die Form:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = 0 \tag{4.8}$$

Das geübte Auge erkennt darin aber sogleich die »Hamilton-Jacobi-Gleichung« (zur Bestimmung der Wirkung S) der klassischen Mechanik, und dort gilt $p = \nabla S$ bzw. $v = \nabla S/m$. Einen kurzen Exkurs in diesen Zweig der analytischen Mechanik geben wir in Appendix A. Der enge Zusammenhang zwischen Quantenmechanik und der Hamilton-Jacobi-Theorie ist im Übrigen auch der Ausgangspunkt für die Wentzel-Kramer-Brillouin-Näherung (WKB-Näherung) (siehe etwa [58]).

Bis zu diesem Zeitpunkt sind spezielle Interpretationsfragen offensichtlich noch gar nicht berührt worden. Tatsächlichen finden sich diese Herleitungen auch in Darstellungen der Quantenmechanik, die auf der Wahrscheinlichkeitsinterpretation aufbauen (siehe etwa [57, Band 3]). Dort wird Hamilton-Jacobi-Theorie als klassischer Limes der Quantenmechanik gedeutet und die Gleichung 4.7 als Ausdruck der Wahrscheinlichkeitserhaltung.

Die *deterministische Interpretation* gewinnt man nun, indem man die Beziehung $v = 1/m \cdot \nabla S$ auch *ohne* den klassischen Limes als Bewegungsgleichung für tatsächliche Teilchenbahnen $Q(t)$ in der Quantenmechanik deutet:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\nabla S(\mathbf{r}, t)}{m}\Big|_{\mathbf{r}=Q} \tag{4.9}$$

Für den ursprünglich vernachlässigten Term in der Hamilton-Jacobi-Gleichung 4.6 führte Bohm die Bezeichnung Quantenpotential ein:

$$U_{\text{quant}} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2 R}{2mR} \tag{4.10}$$

4.1.1 Anmerkung zur 1. Motivation

Die hier diskutierte Motivation ist der Bohmschen Originalarbeit [3] entnommen. Sie gibt also einen Eindruck davon, wie die Grundgleichungen dieser Theorie von Bohm tatsächlich entdeckt wurden. Andererseits verleitet diese Herleitung zu dem folgenschweren Missverständnis, dass Bohmsche Mechanik im Wesentlichen

[4] Offensichtlich eingängiger ist das Argument, dass dieser Term im Limes $\hbar \to 0$ verschwindet. Da h jedoch dimensionsbehaftet ist, kann der Limes so naiv nicht durchgeführt werden. Dieser sog. »klassische Limes« ist ein gutes Beispiel für eine mit Vorsicht zu betrachtende Näherung.

eine Modifikation der klassischen Mechanik ist. Schließlich ist die Hamilton-Jacobi-Theorie äquivalent zur Newtonschen Mechanik. Lediglich das Auftreten eines zusätzlichen (Quanten-)Potentials unterscheidet sie auf den ersten Blick von der klassischen Theorie. Auf den zentralen Unterschied kann jedoch nicht entschieden genug hingewiesen werden: Während in der klassischen Mechanik erst Geschwindigkeit *und* Ort die Teilchenbahn festlegen, reicht in der Bohmschen Mechanik eine Anfangsbedingung, da die *guiding equation* erster Ordnung ist. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist S nämlich durch die Schrödingergleichung bereits festgelegt.

Durch diese radikal nicht-klassische Struktur der Bohmschen Mechanik verlieren Konzepte wie Energie, Impuls etc. auf dem Niveau der individuellen Bohmschen Teilchen ihre Bedeutung. Im Folgenden zeigen wir, dass eine Motivation der Bewegungsgleichung der Bohmschen Mechanik auch ohne Rekurs auf die Hamilton-Jacobi-Theorie und ein »Quantenpotential« gegeben werden kann. Diese verschiedenen Motivationen der Grundgleichung geben Anlass für verschiedene Schulen der de Broglie-Bohm Theorie. In Abschnitt 4.6 werden wir auf diese Fragen näher eingehen.

4.2 Motivation 2: Wahrscheinlichkeitsstrom

Die 2. Motivation schlägt von der Kontinuitätsgleichung direkt eine Brücke zur Bewegungsgleichung der Bohmschen Mechanik. Sie vermeidet dadurch die längliche Diskussion der Nähe zum Hamilton-Jacobi-Formalismus.

Wir sind bei der 1. Motivation bereits auf die Kontinuitätsgleichung 4.7 geführt worden. Ihre Herleitung braucht allerdings nicht den Umweg über das Aufspalten in Real- und Imaginärteil der Schrödingergleichung. Üblicherweise (etwa [58]) verfährt man wie folgt: Man betrachtet die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2 = \psi^*\psi$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} \\
&= \frac{1}{-i\hbar}(H\psi^*)\psi + \frac{1}{i\hbar}\psi^*(H\psi) \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\left[(\nabla^2\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla^2\psi)\right]
\end{aligned}$$

Die erste Umformung verwendet, dass der Hamiltonoperator gerade die Zeitentwicklung des Systems beschreibt. Die zweite Umformung setzt voraus, dass das Potential zeitunabhängig ist und somit nur der kinetische Term des Hamiltonian berücksichtigt werden muss.

Man definiert nun den »Wahrscheinlichkeitsdichtestrom« $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ als:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right] \tag{4.11}$$

Verlag Harri Deutsch – Passon: *Bohmsche Mechanik* – ISBN: 978-3-8171-1856-4

Diese Definition ist gerade so gewählt, dass folgende Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0 \tag{4.12}$$

Der klassische Zusammenhang zwischen Strom, Dichte und Geschwindigkeit ist aber gerade $\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$. Setzt man jedoch $\psi = Re^{\frac{i}{\hbar}S}$ in die Definition von $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ein, wird man unmittelbar auf folgende Beziehung geführt:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\nabla S}{m} \tag{4.13}$$

Dies ist aber gerade die Bewegungsgleichung der Bohmschen Mechanik.

4.2.1 Anmerkung zur 2. Motivation

Diese Motivation hat den großen Vorzug der Einfachheit. Sie greift jedoch (unnötigerweise) auf probabilistische Konzepte zurück. Interessanterweise existiert noch ein weiterer Zugang, der auch in der Motivation der Grundgleichung keine Anleihen an »Wahrscheinlichkeitsdichten« und »Wahrscheinlichkeitsstromdichten« macht.

4.3 Motivation 3: Symmetriebetrachtung

Unsere 3. Skizze [10] einer Motivation der Bohmschen Mechanik betont schließlich ihre Eigenständigkeit am stärksten. Um eine vollständige Redundanz der Ergebnisse zu vermeiden, formulieren wir die Grundgleichungen hier für N Teilchen.

Wir suchen die Beschreibung eines quantenmechanischen Zustandes von N Teilchen. Wir wollen den Teilchenbegriff ernst nehmen und fügen der Wellenfunktion $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ für eine *vollständige* Beschreibung die Orte der Teilchen $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ hinzu. Unsere Theorie muss also Bewegungsgleichungen für den »Zustand« (Q, ψ) angeben.

Für die Wellenfunktion haben wir bereits die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 \psi + V\psi \tag{4.14}$$

Für die Orte Q brauchen wir eine Gleichung vom Typ

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = v^{\psi}(Q) \tag{4.15}$$

mit $v^{\psi} = (v_1^{\psi}, \ldots, v_N^{\psi})$. Das ψ-Feld soll also die Teilchenbewegung leiten. Das Geschwindigkeitsfeld soll dabei durch Einfachheit und Symmetrieforderungen ausgezeichnet sein. Die Forderung der Rotationsinvarianz führt im einfachsten Fall zu der Form:

$$v_k^{\psi} \propto \frac{\nabla_k \psi}{\psi}$$

Die Schrödingergleichung ist Zeitumkehrinvariant, wenn die Wellenfunktion komplex konjugiert wird ($\psi \to \psi^*$). Für das Geschwindigkeitsfeld wird also sinnvollerweise gefordert:

$$v_k^{\psi^*} = -v_k^{\psi}$$

Dadurch wird die Form von v^ψ weiter eingeschränkt:

$$v_k^{\psi} \propto \Im \frac{\nabla_k \psi}{\psi}$$

Der (reelle) Proportionalitätsfaktor wird schließlich durch die Forderung festgelegt, dass das Geschwindigkeitsfeld das entsprechende Verhalten unter der Transformation $v^\psi \to v^\psi + u$ (»Boost«) hat [10]. Damit gewinnt man:

$$v_k^{\psi} = \frac{\hbar}{m_k} \Im \frac{\nabla_k \psi}{\psi} \tag{4.16}$$

Wählt man für ψ die Darstellung $\psi = Re^{iS/\hbar}$, hat diese Gleichung die Form:

$$v_k^{\psi} = \frac{\nabla_k S}{m_k} \tag{4.17}$$

In Gleichung 4.16 haben wir also nur eine andere Darstellung für die *guiding equation* der Bohmschen Mechanik.

4.3.1 Anmerkung zur 3. Motivation

In dieser Skizze einer alternativen Motivation finden also, wie auch in Motivation 2, weder das »Quantenpotential« noch die »Quanten-Hamilton-Jacobi«-Gleichung Erwähnung. Diesen kommt in der mathematischen Struktur auch keine besondere Bedeutung zu, da Bohmsche Mechanik erster Ordnung ist (siehe dazu vor allem auch Abschnitt 4.6). Im Vordergrund steht, dass eine Vervollständigung der Theorie mit Hilfe der Teilchenorte angestrebt wird. Das Symmetrieargument ist dabei sicherlich abstrakter als die ersten beiden Motivationen und kann in seiner Tragweite weniger gut überblickt werden. Es ist jedoch interessant, dass eine Theorie erster Ordnung Galilei-invariant sein kann.

4.4 Die Quantengleichgewichtshypothese

Um alle statistischen Aussagen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik reproduzieren zu können, muss für die Teilchenorte eines Systems, das durch die Wellenfunktion ψ beschrieben wird, eine $|\psi|^2$-Verteilung angenommen werden. Dies wird auch als Quantengleichgewichtshypothese bezeichnet[5]:

[5] Die Äquivalenz zwischen Bohmscher und Quantenmechanik braucht neben der Quantengleichgewichtshypothese noch die Annahme, dass die Ergebnisse *aller* Messungen in *Ortskoordinaten* formuliert werden können. Schließlich zeichnet die Bohmsche Mechanik den Ort explizit aus. Diese Bedingung kann jedoch offensichtlich erfüllt werden, da jedes Experiment im *Ortsraum* durchgeführt wird (und nicht etwa im *Impulsraum*). Konkret denke man etwa an die *Position* des Zeigers eines Messgerätes. Die sog. *Kontextualisierung* aller anderen Eigenschaften ist Gegenstand des Kapitels 5.

Verlag Harri Deutsch – Passon: *Bohmsche Mechanik* – ISBN: 978-3-8171-1856-4