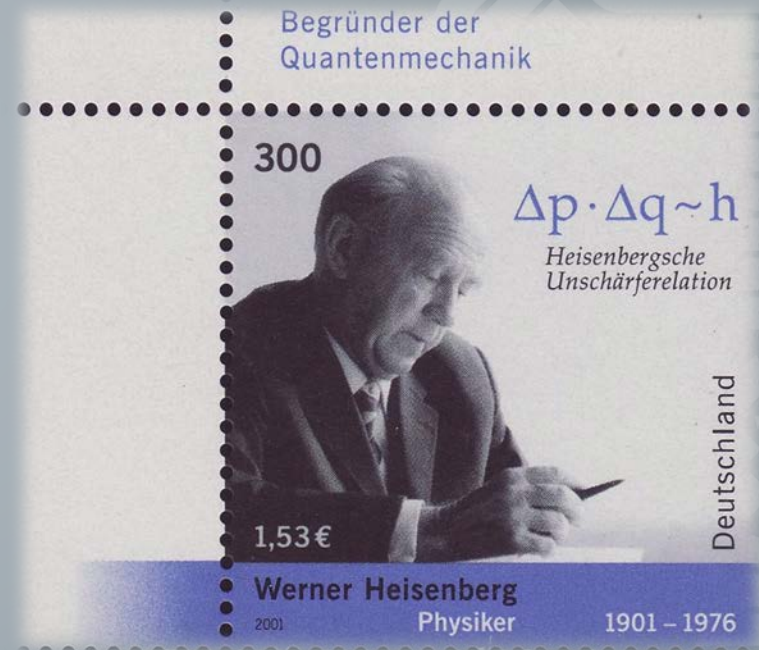


# Entdeckung und Bedeutung der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Oliver Passon  
Bergische Universität Wuppertal  
Physik und ihre Didaktik



## **A Wissenschaftshistorischer Kontext**

Rekonstruktion der Entwicklung, die zur Formulierung der Unbestimmtheitsrelation geführt hat

## **B Neuere fachwissenschaftliche Entwicklungen**

Bedeutung der Unbestimmtheitsrelation und fachdidaktische Implikationen

# Der wissenschaftshistorische Kontext

- vor **1925** „alte Quantentheorie“: Lichtelektrischer Effekt, Bohrsches Atommodell, de Broglie Materiewellen...
- 1925** **Juli:** Heisenberg: „Über quantentheoretische Umdeutung...“  
**September- November:** Born-Heisenberg-Jordan bauen die Theorie zur „Matrizenmechanik“ aus
- 1926** ab **Januar:** „Wellenmechanik“ von Schrödinger  
**Juni:** Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion  
**Juli:** Schrödingers Vortrag in München  
**Oktober:** Schrödingers Besuch in Kopenhagen  
Briefwechsel (Pauli, Heisenberg, Schrödinger, Bohr)
- 1927** **März:** Arbeit zur Unbestimmtheitsrelation

## Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Von W. Heisenberg in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 23. März 1927.)

Eine physikalische Theorie glauben wir dann anschaulich zu verstehen, wenn wir uns in allen einfachen Fällen die experimentellen Konsequenzen dieser Theorie qualitativ denken können, und wenn wir gleichzeitig erkannt haben, daß die Anwendung der Theorie niemals innere Widersprüche enthält.

Zum Beispiel glauben wir die Einsteinsche Vorstellung vom geschlossenen dreidimensionalen Raum anschaulich zu verstehen, weil für uns die experimentellen Konsequenzen dieser Vorstellung widerspruchsfrei denkbar sind. Freilich widersprechen diese Konsequenzen unseren gewohnten anschaulichen Raum-Zeitbegriffen.

Aber daß eine Revision der kinematischen und mechanischen Begriffe notwendig ist, scheint aus den Grundgleichungen der Quantenmechanik unmittelbar zu folgen. Wenn eine bestimmte Masse  $m$  gegeben ist, hat es in unserer gewohnten Anschauung einen einfach verständlichen Sinn, vom Ort und der Geschwindigkeit des Schwerpunkts dieser Masse  $m$  zu sprechen. In der Quantenmechanik aber soll eine Relation  $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$  zwischen Masse, Ort und Geschwindigkeit bestehen. Wir haben also guten Grund, gegen die kritiklose Anwendung jener Worte „Ort“ und „Geschwindigkeit“ Verdacht zu schöpfen. Wenn man zugibt, daß für Vorgänge in sehr kleinen Räumen und Zeiten Diskontinuitäten irgendwie typisch sind, so ist ein Versagen eben der Begriffe „Ort“ und „Geschwindigkeit“ sogar unmittelbar plausibel: [...]

# Operationale Definition des Begriffs „Ort“

Wenn man sich darüber klar werden will, was unter dem Worte „Ort des Gegenstandes“, z. B. des Elektrons (relativ zu einem gegebenen Bezugssystem), zu verstehen sei, so muß man bestimmte Experimente an-  
geben, mit deren Hilfe man den „Ort des Elektrons“ zu messen gedenkt; anders hat dieses Wort keinen Sinn.

An solchen Experimenten, die im Prinzip den „Ort des Elektrons“ sogar beliebig genau zu bestimmen gestatten, ist kein Mangel, z. B.: Man beleuchte das Elektron und betrachte es unter einem Mikroskop. Die höchste erreichbare Genauigkeit der Ortsbestimmung ist hier im wesentlichen durch die Wellenlänge des benutzten Lichtes gegeben. Man wird aber im Prinzip etwa ein  $\Gamma$ -Strahl-Mikroskop bauen und mit diesem die Ortsbestimmung so genau durchführen können, wie man will.

- Die (Compton-)Streuung des Lichts verändert den Impuls des Elektrons unstetig (Kritik von Bohr...)
- Sei  $q_1$  die Genauigkeit, mit der der Ort bekannt ist (hier:  $q_1 \sim \lambda$ )
- Sei  $p_1$  die Genauigkeit, mit der der Impuls bekannt ist (hier:  $p_1 \sim h/\lambda$ )

[...] so stehen nach elementaren Formeln des Comptoneffekts  $p_1$  und  $q_1$  in der Beziehung

$$p_1 q_1 \sim h. \quad (1)$$

also je genauer der Ort bestimmt ist, desto ungenauer ist der Impuls bekannt und umgekehrt; hierin erblicken wir eine direkte anschauliche Erläuterung der Relation  $\mathbf{p} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi i}$ .

# Heisenbergs Begründung der „neuen Quantenmechanik“ 1925

## Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.

Von W. Heisenberg in Göttingen.

(Eingegangen am 29. Juli 1925.)

Bekanntlich läßt sich gegen die formalen Regeln, die allgemein in der Quantentheorie zur Berechnung beobachtbarer Größen (z. B. der Energie im Wasserstoffatom) benutzt werden, der schwerwiegende Einwand erheben, daß jene Rechenregeln als wesentlichen Bestandteil Beziehungen enthalten zwischen Größen, die scheinbar prinzipiell nicht beobachtet werden können (wie z. B. Ort, Umlaufszeit des Elektrons), daß also jenen Regeln offenbar jedes anschauliche physikalische Fundament mangelt, wenn man nicht immer noch an der Hoffnung festhalten will, daß jene bis jetzt unbeobachtbaren Größen später vielleicht experimentell zugänglich gemacht werden könnten.

# Das „Beobachtbarkeitsprinzip“

- Diese Hoffnung erscheint jedoch unberechtigt, da die bisherige Quantentheorie einen sehr begrenzten Anwendungsbereich hat

Bei dieser Sachlage scheint es geratener, jene Hoffnung auf eine Beobachtung der bisher unbeobachtbaren Größen (wie Lage, Umlaufzeit des Elektrons) ganz aufzugeben, gleichzeitig also einzuräumen, daß die teilweise Übereinstimmung der genannten Quantenregeln mit der Erfahrung mehr oder weniger zufällig sei, und zu versuchen, eine der klassischen Mechanik analoge quantentheoretische Mechanik auszubilden, in welcher nur Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen vorkommen.

*Strahlungsfrequenzen, Intensitäten, Polarisation, ...*

# Grundidee der 25er Arbeit

Klassische Fourier-Darstellung:

$$x(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}_{\alpha}(n) e^{i\omega(n)\alpha t}$$

Quantenmechanische Modifikation:

$$v(n, n - \alpha) = \frac{1}{h} [W(n) - W(n - \alpha)]$$

“Zur Quantenmechanik” (Z. Phys. 34 (1925) pp.858.) Born und Jordan:

§ 3. Die Grundgesetze. Das dynamische System ist zu beschreiben durch die Koordinate  $\mathbf{q}$  und den Impuls  $\mathbf{p}$ . Sie sollen als Matrizen

$$\mathbf{q} = (q(nm) e^{2\pi i v(nm)t}), \quad \mathbf{p} = (p(nm) e^{2\pi i r(nm)t}) \quad (24)$$

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$$

# Der Verzicht auf Anschaulichkeit zur Vermeidung von Widersprüchen

Es ist wirklich meine Überzeug[un]g, daß eine Interpretation der Rydberg-Formel im Sinne von Kreis- und Ellipsenbahnen in *klassischer Geometrie* nicht den geringsten physikalischen Sinn hat und meine ganzen kümmerlichen Bestrebungen gehen dahin, den Begriff der Bahnen, die man doch nicht beobachten kann, restlos umzubringen und geeignet zu ersetzen.

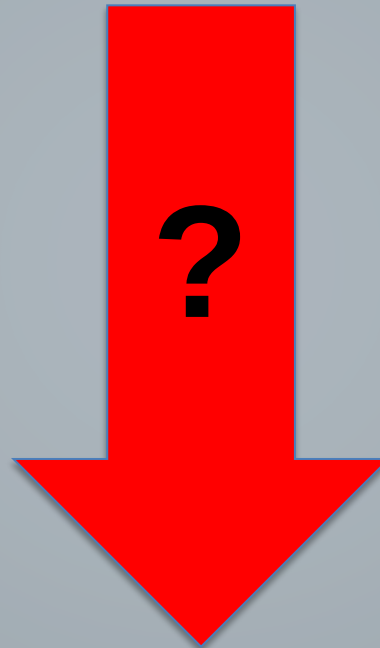
Während also die frühere Theorie den Vorteil der unmittelbaren Anschaulichkeit und des Gebrauchs bewährter physikalischer Prinzipien mit dem Nachteil verband, im allgemeinen mit Beziehungen zu rechnen, die prinzipiell nicht prüfbar waren und daher zu inneren Widersprüchen führen konnten, sollte die neue Theorie auf die Anschaulichkeit zunächst ganz verzichten, dafür aber nur ganz konkrete Beziehungen enthalten, die einer unmittelbaren experimentellen Prüfung zugänglich sind und deswegen kaum in die Gefahr innerer Widersprüche kommen.

Heisenberg 1925 (Brief an Pauli, 9. Juli 1925, Dokument 96)

Heisenberg, W. (1926) „Quantenmechanik“, *Die Naturwissenschaften* **14**(45): 989–994 (Vortrag auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, 23. 9. 1926)

Heisenberg 1925:

Will nur **beobachtbare** Größen in Theorie aufnehmen, zählt den Ort **nicht** dazu, hält Anschaulichkeit für **hinderlich**



Heisenberg 1927:

Verspricht **Anschaulichkeit** im Titel, diskutiert eine **Ortsmessung**, lässt die **Theorie** die Grenzen der Anwendbarkeit der Begriffe bestimmen

# Erwin Schrödinger (1926)

## Quantisierung als Eigenwertproblem

|                    |                    |                                  |
|--------------------|--------------------|----------------------------------|
| Erste Mitteilung:  | Ann. Phys. 79, 361 | (eing. 27.1.1926 – ersch. 13.3.) |
| Zweite Mitteilung: | Ann. Phys. 79, 489 | (23.2.1926)                      |
| Dritte Mitteilung: | Ann. Phys. 80, 437 | (10.5.1926)                      |
| Vierte Mitteilung: | Ann. Phys. 81, 109 | (21.6.1926)                      |

Aus der ersten Mitteilung:

§ 3. Es liegt natürlich sehr nahe, die Funktion  $\psi$  auf *einen Schwingungsvorgang* im Atom zu beziehen, dem die den Elektronenbahnen heute vielfach bezweifelte Realität in höherem Maße zukommt als ihnen.

### **Anmerkung:**

Bereits im März/April `26 wird die mathematische Äquivalenz von Matrizen- und Wellenmechanik erkannt (Schrödinger, Pauli und Eckert)

# Schrödingers Wellenmechanik und eine anschauliche Deutung der Quantentheorie



Es ist kaum nötig, hervorzuheben, um wie vieles sympathischer die Vorstellung sein würde, daß bei einem Quantenübergang die Energie aus einer Schwingungsform in eine andere übergeht, als die Vorstellung von den springenden Elektronen.

23. Juli 1926: Vortrag von Schrödinger in München über Wellenmechanik.  
In Heisenberg (1946) erinnert sich Heisenberg:

[...] erhob sich spontan W. Wien und sprach voll Begeisterung darüber, daß nun offenbar die These der Quantensprünge durch etwas Vernünftiges ersetzt worden sei und daß man jetzt hoffen dürfe, daß bald eine Klärung der Atom-Physik zu einer ähnlichen Anschaulichkeit, wie sie in der klassischen Physik üblich war, gelingen werde. Auch die Theoretiker erkannten voll Staunen, daß hier zum ersten Male ein anschauliches Bild des strahlenden Atoms zu den richtigen Schwingungszahlen des ausgestrahlten Lichtes führte.

# Heisenbergs Reaktion auf Schrödinger



Heisenberg an Pauli (z. Z. München, 28. Juli 1926)

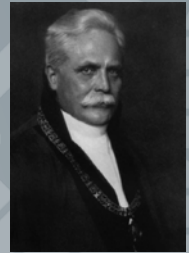
Lieber Pauli!

[...] So nett Schr[ödinger] persönlich ist, so merkwürdig find' ich seine Physik: man kommt sich, wenn man sie hört, um 26 Jahre jünger vor Schr[ödinger] wirft ja alles "quantentheoretische": nämlich lichtelektrischen Effekt, Francksche Stöße, Stern-Gerlacheffekt usw. über Bord; dann ist es nicht schwer, eine Theorie zu machen. Aber sie stimmt eben nicht mit der Erfahrung.

Pauli, W. (1979) Wissenschaftlicher Briefwechsel Bd. 1 (1919-29) A. Hermann, K. v. Meyenn, V. F. Weisskopf (Hrg.), Springer: Berlin (Dokument 142).

Anfang Oktober 1926: Schrödinger auf Einladung Bohrs in Kopenhagen. Gemeinsame Diskussionen (u.a.) mit Bohr und Heisenberg.

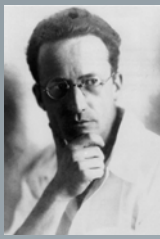
Schrödinger an Wien (Zürich 21. Oktober 1926)



Hochverehrter Herr Geheimrat!

[...] Bohrs augenblickliche Einstellung zu den Atomproblemen [...] ist wirklich sehr merkwürdig. Er ist vollkommen überzeugt, daß ein Verständnis im gewöhnlichen Sinne des Wortes unmöglich ist. [...] Ganz sicher ist der Standpunkt der **anschaulichen Bilder**, den de Broglie und ich einnehmen, noch längst nicht weit genug durchgeführt, um von den wichtigsten Tatsachen Rechenschaft zu geben [...] Diese unhaltbaren Stücke gerade in den bisher haltbarsten Vorstellungen zu suchen, erscheint mir sehr voreilig, ich meine in den ganz allgemeinen Vorstellungen von Raum, Zeit und dem Wechselwirkungszusammenhang benachbarter Raumzeitstellen [...]

Karl von Meyenn (Hg.) 2011, S. 320f.



Schrödinger an Bohr (Zürich 23. Oktober 1926)

Lieber und hochverehrter Herr Professor Bohr!

[...] Was mir vor Augen schwebt, ist nur die eine These: man darf, auch wenn hundert Versuche fehlschlagen, die Hoffnung nicht aufgeben, ich sage nicht durch klassische Bilder, aber durch logisch widerspruchsfreie Vorstellungen von der wirklichen Beschaffenheit des **räumlich-zeitlichen** Geschehens zum Ziele zu kommen. Es ist außerordentlich wahrscheinlich, daß das möglich ist.

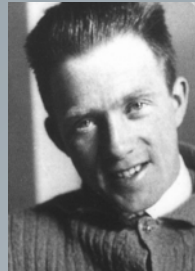
Karl von Meyenn (Hg.) 2011, S. 325.

Man beachte: Der Begriff der **Anschaulichkeit** wird in der damaligen Debatte i.d.R. terminologisch verwendet:

*„Anschaulich“* = „in *Raum* und *Zeit* darstellbar“

Denn „Raum“ und „Zeit“ sind bei Kant **„Anschauungsformen“**, d.h. a priori (gegen den Empirismus gerichtet) und nicht bloß Begriffe (gegen den Rationalismus gerichtet)

# Die Begriffe „Raum und Zeit“ bei Heisenberg im Herbst 1926



## Heisenberg an Pauli (Kopenhagen, 28. Oktober 1926):

Lieber Pauli!

[...] Ich hab bei alledem eine Hoffnung auf eine spätere Lösung von etwa der folgenden Art (aber man sollte so was ja nicht laut sagen): daß **Raum und Zeit** wirklich nur **statistische Begriffe**, wie etwa Temperatur, Druck usw. in einem Gas sind. Ich meine, daß räumliche und zeitliche Begriffe bei *einer* Korpuskel sinnlos sind und daß sie mehr und mehr Sinn bekommen, je mehr Partikel vorhanden sind. Ich versuche oft, in dieser Richtung weiter zu kommen, aber es will bis jetzt nicht gelingen.

Pauli, W. (1979) Wissenschaftlicher Briefwechsel Bd. 1 (1919-29) A. Hermann, K. v. Meyenn, V. F. Weisskopf (Hrg.), Springer: Berlin (Dokumente144).

# Die Begriffe „Raum und Zeit“ bei **Pauli** im Herbst 1926

## **Pauli** an Heisenberg (Hamburg, 19. Oktober 1926):

Lieber Heisenberg!

[...] Die historische Entwicklung hat es mit sich gebracht, daß die Verknüpfung der Matrixelemente mit der Beobachtung zugänglichen Daten auf dem Umweg über die emittierte Strahlung vorgenommen wird. Ich bin aber jetzt mit der ganzen Inbrunst meines Herzens davon überzeugt, daß die Matrixelemente mit prinzipiell beobachtbaren kinematischen (vielleicht statistischen) Daten der betreffenden Teilchen in den stationären Zuständen verknüpft sein müssen.

[...]

Pauli, W. (1979) Wissenschaftlicher Briefwechsel Bd. 1 (1919-29) A. Hermann, K. v. Meyenn, V. F. Weisskopf (Hrg.), Springer: Berlin (Dokumente 143).

# Pauli an Heisenberg 19. Oktober 1926 (Fortsetzung)

Denn man kann ja zunächst nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß in einem bestimmten stationären Zustand des Systems die Koor[di]naten  $q_k$  seiner Teilchen ( $k = 1, \dots, f$ ) zwischen  $q_k$  und  $q_k + dq_k$  liegen. Die Antwort hierauf ist

$$|\psi(q_1 \cdots q_f)|^2 dq_1 \cdots dq_f,$$

wenn  $\psi$  die Schrödingersche Eigenfunktion ist. [...] Diese Wahrscheinlichkeit müssen wir als prinzipiell beobachtbar ansehen, genau so wie die Lichtintensität als Ortsfunktion in stehenden Lichtwellen. [...]

Ich freue mich schon sehr auf Ihre Antwort. Jetzt können Sie einmal kritisieren und pöbeln!

Viele herzliche Grüße an Sie selbst, an Bohr und alle Kopenhagener (unbekannterweise auch an Herrn Dirac).

Ihr W. PAULI

# Pauli verallgemeinert damit die „Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation“ der Wellenfunktion (Juni 1926)

## **Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.**

[Vorläufige Mitteilung.<sup>1)</sup>]

Von **Max Born**, Göttingen.

(Eingegangen am 25. Juni 1926.)

Durch eine Untersuchung der Stoßvorgänge wird die Auffassung entwickelt, daß die Quantenmechanik in der Schrödingerschen Form nicht nur die stationären Zustände, sondern auch die Quantensprünge zu beschreiben gestattet.

Durch die „statistische Deutung“ wird Schrödingers (kontinuierliche) Wellenfunktion mit den „typischen Diskontinuitäten“ der QM verbunden.

Durch Paulis Ergänzung erfahren kinematische Konzepte und der Teilchenbegriff wieder eine „Aufwertung“ (Beller 1990, S. 576)

# Auf dem Weg zur Unbestimmtheitsrelation

Bohr verlässt Kopenhagen Mitte Februar (für einen Monat)  
Bereits am 5. Februar 1927 schreibt Heisenberg an Pauli:

Lieber Pauli!

[...] Für mein Privatvergnügen beschäftige ich mich immer mal wieder mit den logischen Grundlagen des ganzen  $pq - qp$ -Schwindels (unrelativistisch) und werd' auch allmählich über manche Zusammenhänge klarer. Jordans Aufsatz in den Naturwissenschaften fand ich recht hübsch - stellenweise nicht sehr exakt. Was bedeutet z. B. die "Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron an einem bestimmten Punkt steht", wenn der Begriff "Ort des Elektrons" nicht anständig definiert wird.

Pauli, W. (1979) Wissenschaftlicher Briefwechsel Bd. 1 (1919-29) A. Hermann, K. v. Meyenn, V. F. Weisskopf (Hrg.), Springer: Berlin (Dokument 153).

## Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Von W. Heisenberg in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 23. März 1927.)

Eine physikalische Theorie glauben wir dann anschaulich zu verstehen, wenn wir uns in allen einfachen Fällen die experimentellen Konsequenzen dieser Theorie qualitativ denken können, und wenn wir gleichzeitig erkannt haben, daß die Anwendung der Theorie niemals innere Widersprüche enthält.

Also kein Bezug zur raum-zeitlichen Einbettung!

# Operationale Definition des Begriffs „Ort“

Wenn man sich darüber klar werden will, was unter dem Worte „Ort des Gegenstandes“, z. B. des Elektrons (relativ zu einem gegebenen Bezugssystem), zu verstehen sei, so muß man bestimmte Experimente angeben, mit deren Hilfe man den „Ort des Elektrons“ zu messen gedenkt; anders hat dieses Wort keinen Sinn.

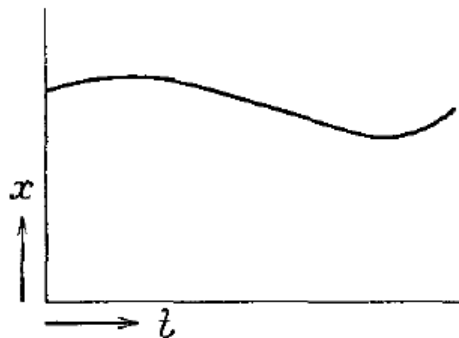


Fig. 1.

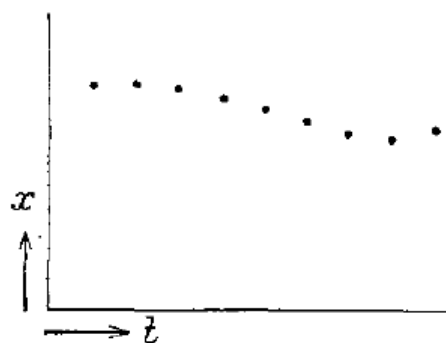
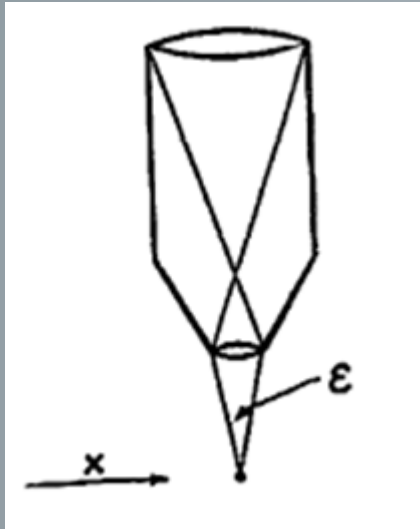


Fig. 2.

## **Anmerkung:**

Dies markiert die Abwendung von einer diskontinuierlichen oder „statistischen“ Raumvorstellung!

# Das $\Gamma$ -Strahl Mikroskop

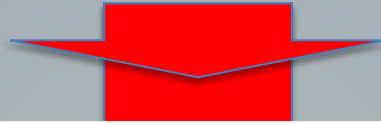


Anwendung des „Umgekehrten Beobachtbarkeitsprinzip“:

Nicht nur „beobachtbare Größen“ in die Theorie aufnehmen, sondern die theoretischen Implikationen für die „Beobachtbarkeit“ untersuche (Gespräch mit Einstein, April 1926)

## Heisenberg 1925:

Will nur beobachtbare Größen in Theorie aufnehmen, zählt den Ort nicht dazu, hält Anschaulichkeit für hinderlich



- Schrödinger bringt „Anschaulichkeit“ wieder auf die „Agenda“
- Statistische Deutung von Born/Pauli ontologisiert den Teilchenbegriff
- Heisenbergs Versuche mit statistischer/diskontinuierlicher Raumvorstellung bleiben erfolglos



## Heisenberg 1927:

Verspricht Anschaulichkeit\* im Titel, diskutiert eine Ortsmessung, lässt die Theorie die Grenzen der Anwendbarkeit der Begriffe bestimmen

# Heisenberg *nach* 1927 über kinematische Größen und Teilchenbegriff

Durch Diskussionen mit Bohr: (operationale) Umdefinition der Begriffe nicht sinnvoll. „Klassische“ Begriffe behalten ihre Bedeutung.

Begriffe werden nicht „**umdefiniert**“ sondern ihre „**Anwendbarkeit**“ wird eingeschränkt (z. Bsp. Chicago lecture, 1929)

Aus dem selben Grund wird auch die **Analogie** zur Relativitätstheorie von Heisenberg ab 1928 nicht mehr verwendet!

Bleibender Dissens mit Bohr: Sind „Welle“ **und** „Teilchenbegriff“ zur Beschreibung notwendig (Bohr), oder kann je ein Standpunkt konsistent vertreten werden (Heisenberg)?



# **B Neuere fachwissenschaftliche Entwicklungen**

## Bedeutung der Unbestimmtheitsrelation

# Eine Ungleichung und viele Fragen:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1)$$

- $\Delta x$  „Ungenauigkeit“, „Unschärfe“, „Unbestimmtheit“, „Störung“ oder „Fehler“?
- „ $\Delta$ “ Definition?
- Ist (1) eine Aussage über gemeinsame Messbarkeit und besteht ein grundsätzlicher Zusammenhang zur Messung?
- Ist der Zusammenhang zwischen Zeit und Energie etwas prinzipiell anderes?
- ...

# Die „traditionelle“ Lesart:

- $\Delta x$  „~~Ungenauigkeit~~“, „Unschärfe“, „Unbestimmtheit“ oder „~~Fehler~~“?  
Besser: Unschärfe oder Unbestimmtheit.
- „ $\Delta$ “ Definition?  
Standardabweichung:  $\Delta A = \sqrt{\langle A - \langle A \rangle \rangle^2}$ .
- Ist HUR eine Aussage über gemeinsame Messbarkeit und besteht ein grundsätzlicher Zusammenhang zur Messung?  
Bezug auf Messung muss nicht hergestellt werden!
- Ist der Zusammenhang zwischen Zeit und Energie etwas prinzipiell anderes?  
Ja, denn es gibt keinen „Zeitoperator“.

# Etwas geschichtlichen Hintergrund:

Heisenberg 1927:  $\delta x \cdot \delta p_x \sim h$

Kennard 1927:  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$  mit:  $\Delta$  = Standardabweichung

Robertson 1929:  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$  (2)

Wegen  $[x, p_x] = i \frac{h}{2\pi}$  folgt (1) als Spezialfall



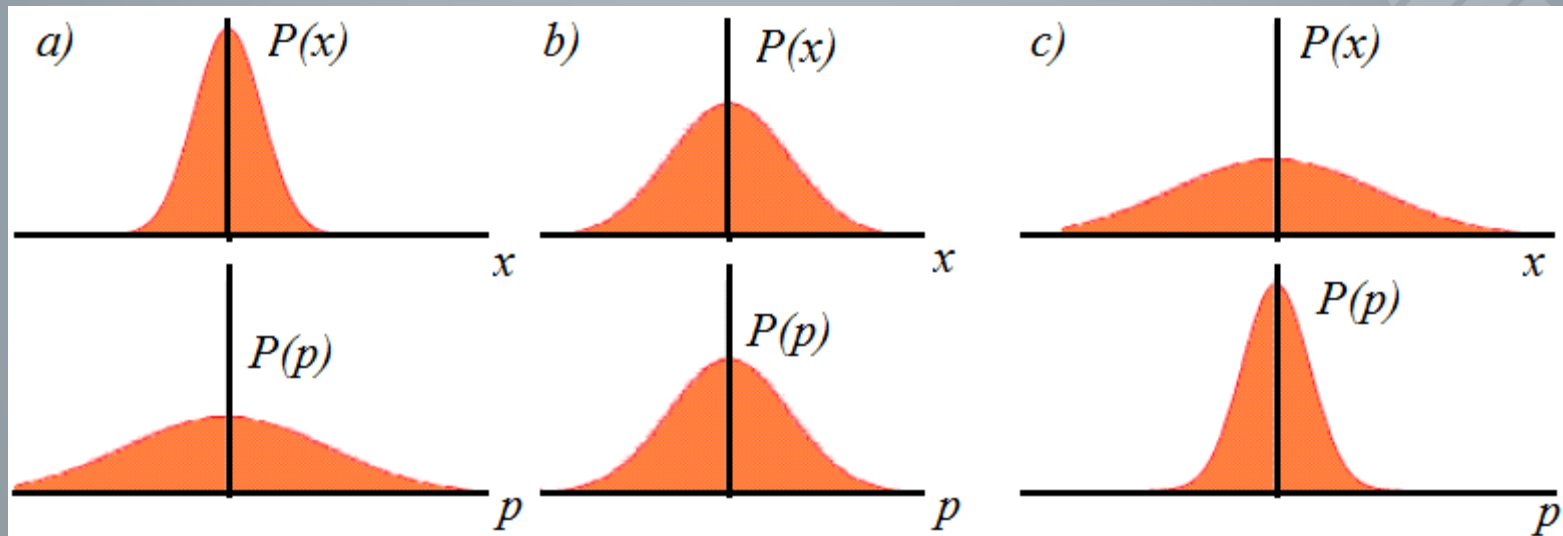
Earle H. Kennard  
(1885 – 1968)



Howard P. Robertson  
(1903 – 1961)

# Zusammenhang zur Messung

Herleitung von Gl. (2) nimmt auf Messung keinen Bezug.  
Folgerung aus dem Formalismus – „Einschränkung der Präparation“



Die  $x$  (bzw.  $p$ ) Messung kann je an einer Teilmenge eines Ensembles identisch präparierter Objekte durchgeführt werden → keine Störung durch die Messung

# Aber eine Messung ist doch auch eine „Störung“...

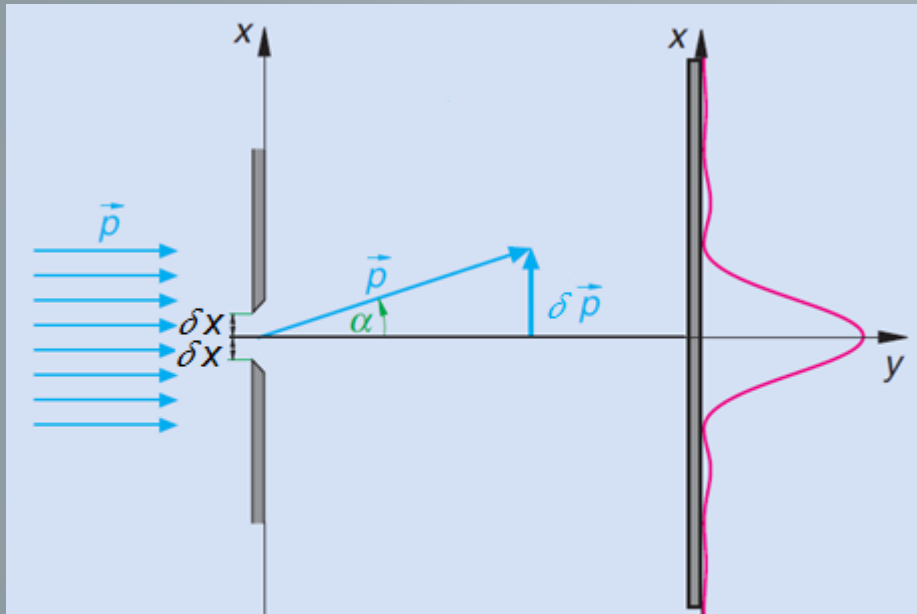
Heisenberg (1927) illustriert die HUR mit Beispielen, die auf die Beeinflussung durch die Messung Bezug nehmen ( $\gamma$ -Strahl Mikroskop)

Neuere Forschungsliteratur schlägt stattdessen **drei Varianten** einer „quantenmechanischen Unbestimmtheit“ vor:

- A. Unmöglichkeit Ort und Impuls gleichzeitig genau zu **präparieren**
- B. Unmöglichkeit einer **gemeinsamen** genauen **Messung**
- C. Die Messung einer Größe aus einem Paar konjugierter Variablen führt auf eine **Störung** der anderen Größe („measurement-disturbance relation“).

Busch, Paul und Brigitte Falkenburg (2009) “Heisenberg uncertainty Relation (Indeterminacy Relations)“, in: D. Greenberger, K. Hentschel und F. Weinert (Hrsg.) “Compendium of Quantum Physics”, Springer: Berlin, Heidelberg.

$\Delta$  ist doch die Standardabweichung,  
oder..?



Grehn, Joachim und Joachim Krause (Hrsg.) (2008) „Metzler Physik“, 4. Auflage, Schroedel: Braunschweig, S. 397.  
Aber auch: **Heisenberg** (1930) „Chicago lecture“

Winkel zum 1. Min:  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{2\delta x}$

$$\sin \alpha = \frac{\delta p_x}{|p|} = \frac{\lambda}{2\delta x} \rightarrow \delta p_x \delta x \approx \frac{|p|\lambda}{2}$$

mit  $\lambda = \frac{h}{p}$  folgt:  $\delta x \cdot \delta p_x \approx \frac{h}{2}$

Mathematisch „exakt“:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \text{ für } |x| \leq a = d/2$$

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x) e^{-ipx} dx \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{\sin(ap)}{ap} \end{aligned}$$

$$\Delta x = \frac{d}{\sqrt{12}} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\int p^2 |\phi(p)|^2 dp} = \infty !!!$$

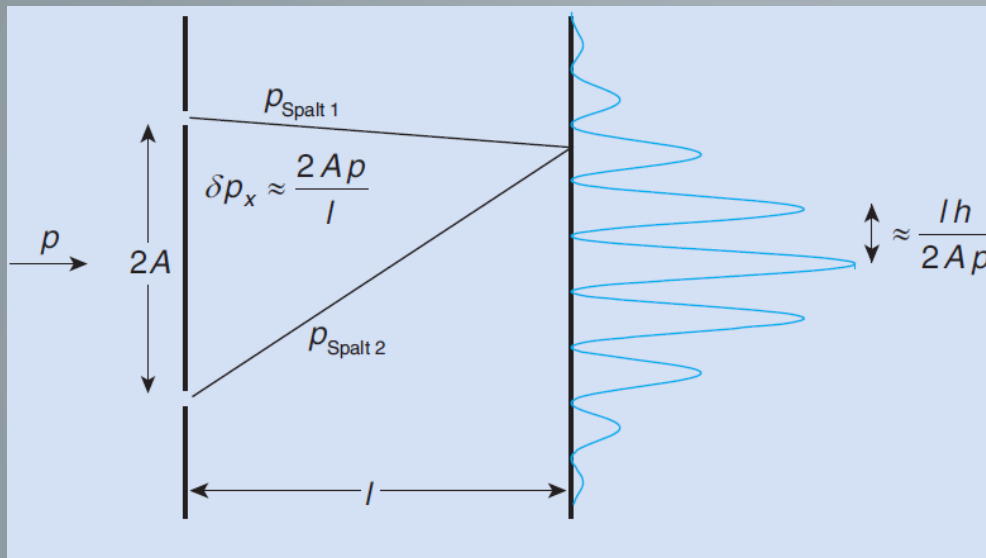
Kleinstes Intervall  $W(\alpha)$ , in dem der Anteil  $\alpha$  (z. Bsp.  $\alpha = 0,9$ ) der Fläche der Verteilung liegt:  
(„totale Breite“)

$$\int_{x_0 - \frac{W_x}{2}}^{x_0 + \frac{W_x}{2}} |\psi(x)|^2 dx = \alpha$$

$$\text{mit } \alpha > \frac{1}{2} \text{ gilt: } W_x \cdot W_p \geq h \cdot (2\alpha - 1)^2$$

**Landau**, H. J. und H. O. **Pollak** (1961) „Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - II“, Bell Syst. Tech. J. 40 (65).

# Unbestimmtheit und Doppelspalt I (Bohr-Einstein Debatte 1927)



Transversalimpulsdifferenz  
zwischen Spalten  $\approx \frac{2Ap}{l}$

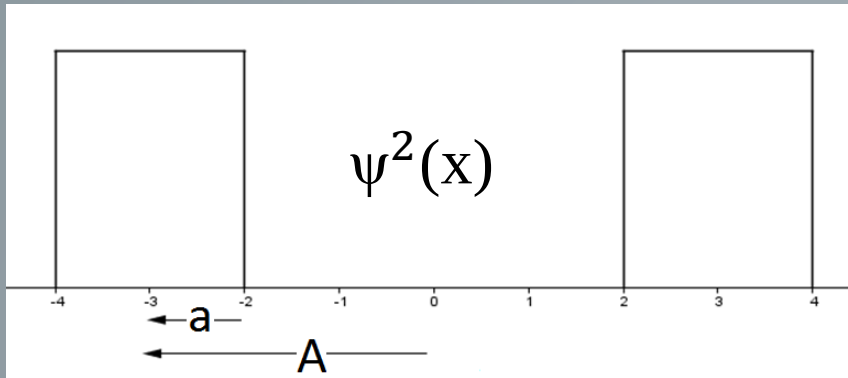
Die Ortsgenauigkeit ist dadurch  
begrenzt:  $\delta X \geq \frac{h}{\delta p} = \frac{lh}{2Ap}$

→ Interferenzstreifen nicht  
sichtbar

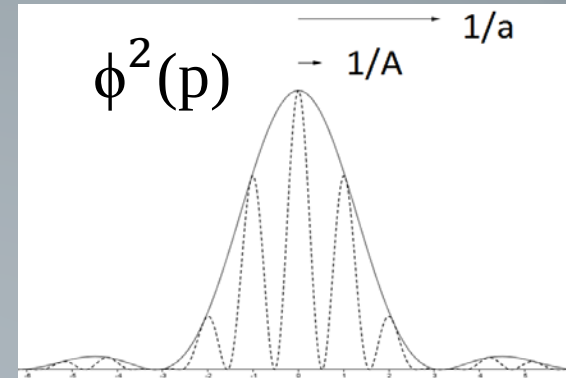
$$\delta x \sim A \qquad \delta p \sim \frac{1}{A}$$

**Frage:** Kann dieses (schulthaugliche) Argument mit der Unbestimmtheitsrelation (Gl. 2) formalisiert werden?

# Unbestimmtheit und Doppelspalt II



Standardabweichung:  $\Delta x \sim A$   
 „totale Breite“:  $W_x \sim A$



$\Delta p = \infty$   
 $W_p(\alpha) \sim 1/a$

Gesucht wird eine Kenngröße, die auf die „Feinstruktur“ ( $1/A$ ) sensitiv ist!

Zwei Arten von Unbestimmtheit bzw. Wahrscheinlichkeitsaussagen:

1. Aus Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Messwerte schließen
2. Aus Messwerten auf die zugrunde liegende Verteilung schließen

$w_p$ : Das kleinste Intervall, um das die Verteilung verschoben werden kann, um von der ursprünglichen unterschieden werden zu können („Translationsbreite“)

$$W_x \cdot w_p \approx h$$

Uffink, Jos und Jan Hilgevoord (1985) Found. of Phys. Vol. 15 No. 9, 925-944.

# Energie-Zeitunbestimmtheit sind doch konzeptionell verschieden, oder...?

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad (\text{Typische Anwendung: Energie u. Lebensdauer})$$

Da es in der QM keinen „Zeitoperator“ gibt, kann diese Gl. nicht aus  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$  hergeleitet werden.

Hilgevoord (1996): Dabei handelt es sich um einen Kategorienfehler:

- Es gibt keinen „Zeitoperator“, aber auch keinen „Raumoperator“.
- Nach dem Vorbild der „Translationsbreite“ können gleichwertige UR auch für Zeit- und Energieskalen hergeleitet werden...

**Hilgevoord**, Jan (1996) “The uncertainty principle for energy and time”, Am. J. Phys. 64(12) 1451-1456.

- **Die „Entdeckung“ der Unbestimmtheitsrelation**
  - Ist ein Beispiel für einen „Konzeptwechsel“ im Sinne der Fachdidaktik
  - Hat Ähnlichkeit mit der Entwicklung des konzeptionellen Verständnisses beim Lerner
- **Die „traditionelle Lesart“ der Unbestimmtheitsrelation muss revidiert werden**
  - Die Robertson Beziehung  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$  ist keine allgemeine Formulierung der Unbestimmtheitsrelation
  - Präparation und Störungsvorstellungen müssen unterschieden werden – haben aber beide ein Recht
- **Didaktische Implikationen**
  - Der Mangel an „mathematischem Apparat“ ist weniger folgenreich als oft angenommen: Semi-klassische Herleitungen sind besser als ihr Ruf!
  - Die Unbestimmtheitsrelation in der Form  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$  zu zitieren macht dann allerdings keinen Sinn...

O. Passon & J. Grebe-Ellis (2015) „Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?“, Praxis Naturwissenschaften – Physik in der Schule 64(7) 44-49.