Die Heisenbergsche Unschärferelation

Neuere fachwissenschaftliche Entwicklungen und ihre didaktischen Implikationen

Oliver Passon und Johannes Grebe-Ellis
Bergische Universität Wuppertal
Physik und ihre Didaktik

Eine Ungleichung und viele Fragen:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1)$$

- Δx „Ungenauigkeit“, „Unschärfe“, „Unbestimmtheit“, „Störung“ oder „Fehler“?
- „Δ“ Definition?
- Ist (1) eine Aussage über gemeinsame Messbarkeit und besteht ein grundsätzlicher Zusammenhang zur Messung?
- Ist der Zusammenhang zwischen Zeit und Energie etwas prinzipiell anderes?
- …

Die „traditionelle“ Lesart:

- Δx „~~Ungenauigkeit~~“, „Unschärfe“, „Unbestimmtheit“ oder „~~Fehler~~“?
  Besser: Unschärfe oder Unbestimmtheit.
- „Δ“ Definition?
  Standardabweichung: $\Delta A = \sqrt{\langle A - \langle A \rangle \rangle^2}$.
- Ist HUR eine Aussage über gemeinsame Messbarkeit und besteht ein grundsätzlicher Zusammenhang zur Messung?
  Bezug auf Messung muss nicht hergestellt werden!
- Ist der Zusammenhang zwischen Zeit und Energie etwas prinzipiell anderes?
  Ja, denn es gibt keinen „Zeitoperator“.

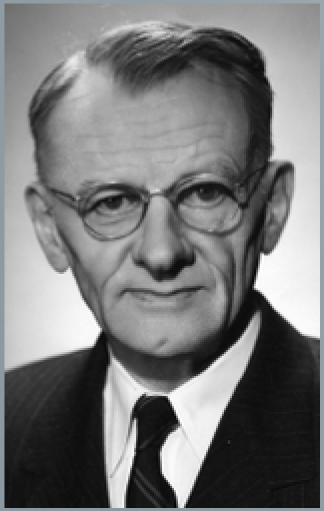
Etwas geschichtlichen Hintergrund:

Heisenberg 1927: $\delta x \cdot \delta p_x \sim h$

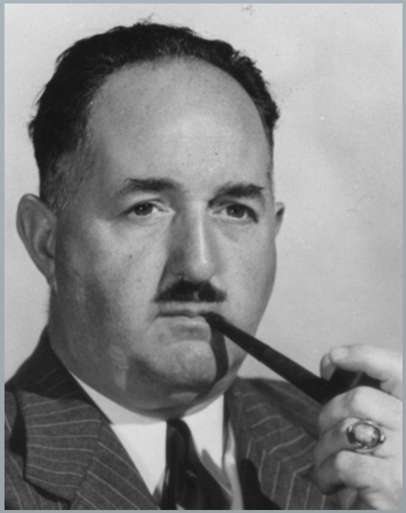
Kennard 1927: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ mit: $\Delta =$ Standardabweichung

Robertson1929: $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ (2)

Wegen $[x, p_x] = i \frac{h}{2\pi}$ folgt (1) als Spezialfall



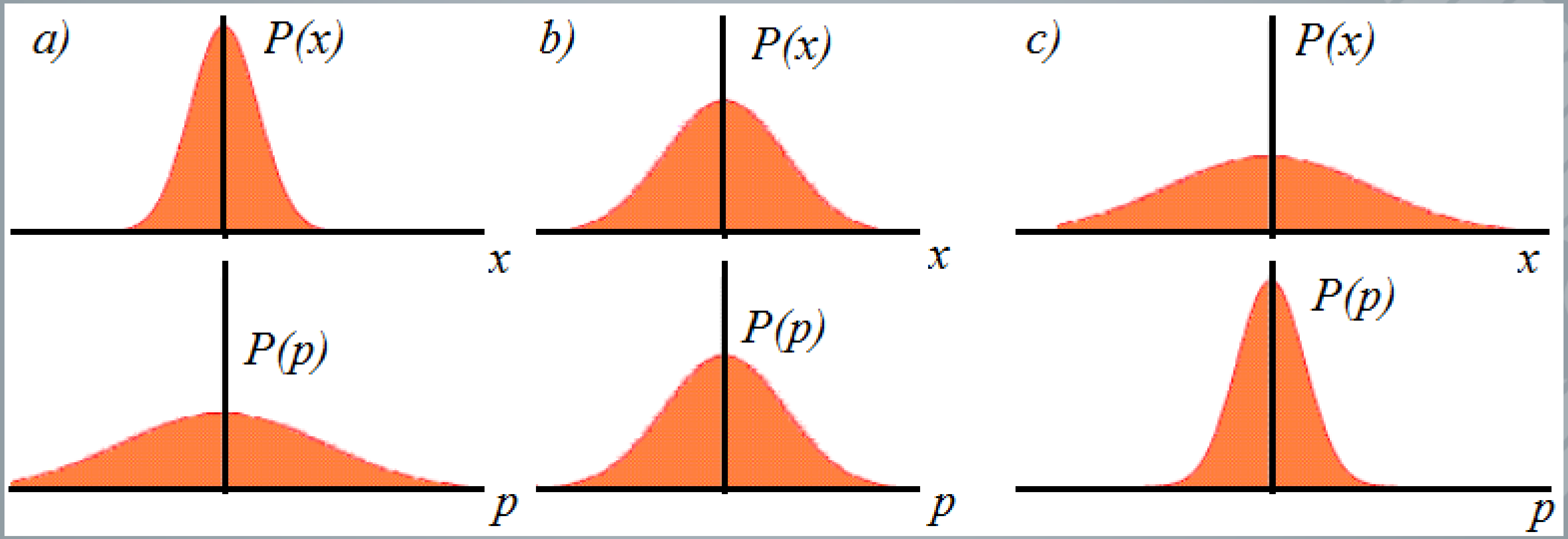
Earle H. Kennard
(1885 – 1968)



Howard P. Robertson
(1903 – 1961)

Zusammenhang zur Messung

Herleitung von Gl. (2) nimmt auf Messung keinen Bezug. Folgerung aus dem Formalismus – „Einschränkung der Präparation“



Die x (bzw. p) Messung kann je an einer Teilmenge eines Ensembles identisch präparierter Objekte durchgeführt werden → keine Störung durch die Messung

Aber eine Messung ist doch auch eine „Störung“…

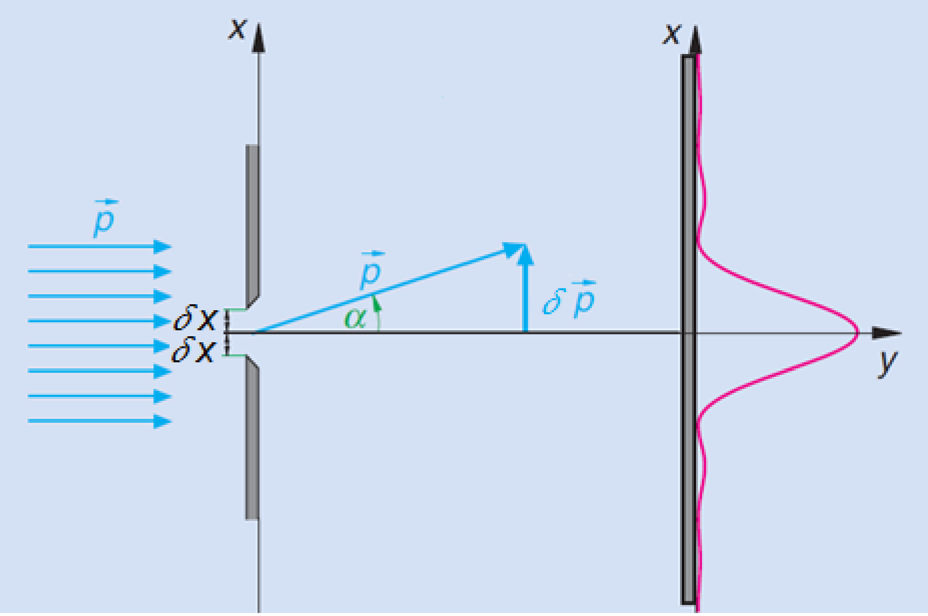
Heisenberg (1927) illustriert die HUR mit Beispielen, die auf die Beeinflussung durch die Messung Bezug nehmen (γ-Strahl Mikroskop)

Neuere Forschungsliteratur schlägt stattdessen **drei Varianten** einer „quantenmechanischen Unschärfe“ vor:

A. Unmöglichkeit Ort und Impuls gleichzeitig genau zu präparieren
B. Unmöglichkeit einer gemeinsamen genauen Messung
C. Die Messung einer Größe aus einem Paar konjungierter Variablen führt auf eine Störung der anderen Größe („measurement-disturbance relation“).

Busch, Paul und Brigitte Falkenburg (2009) “Heisenberg uncertainty Relation (Indeterminacy Relations)“, in: D. Greenberger, K. Hentschel und F. Weinert (Hrsg.) “Compendium of Quantum Physics”, Springer: Berlin, Heidelberg.

Δ ist doch die Standardabweichung, oder..?



Grehn, Joachim und Joachim Krause (Hrsg.) (2008) „**Metzler** Physik“, 4. Auflage, Schroedel: Braunschweig, S. 397.
Aber auch: **Heisenberg** (1930) „Chicago lecture“

Winkel zum 1. Min: $\sin\alpha = \frac{\lambda}{2\delta x}$

$$\sin\alpha = \frac{\delta p_x}{|p|} = \frac{\lambda}{2\delta x} \rightarrow \delta p_x \delta x \approx \frac{|p|\lambda}{2}$$

mit $\lambda = \frac{h}{p}$ folgt: $\delta x \cdot \delta p_x \approx \frac{h}{2}$

Mathematisch „exakt“:

$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ für $|x| \leq a = d/2$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x) e^{-ipx} dx$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{\sin(ap)}{ap}$$

$$\Delta x = \frac{d}{\sqrt{12}} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\int p^2 |\phi(p)|^2 dp} = \infty \text{ !!!}$$

Andere Unbestimmtheitsmaße

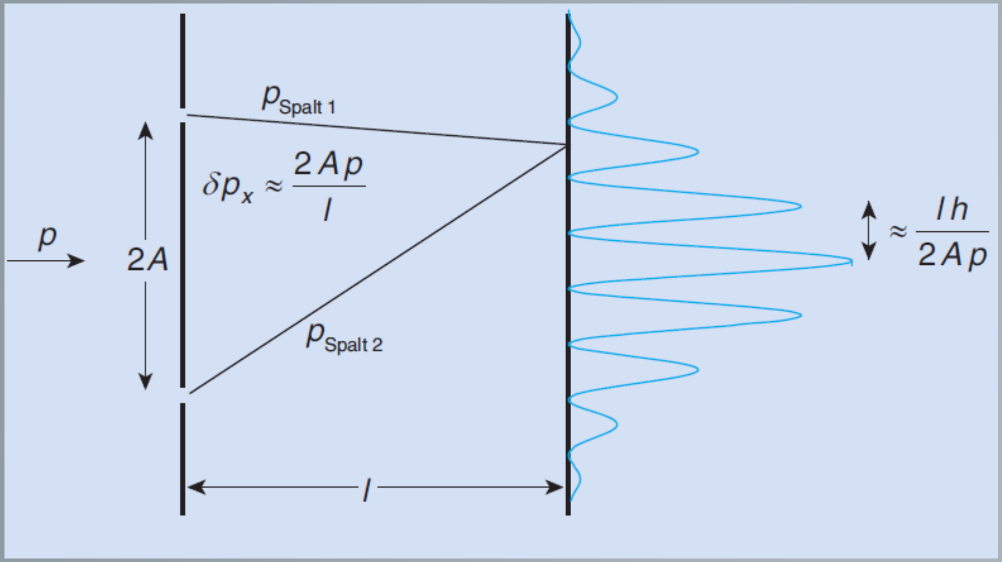
Kleinstes Intervall $W(\alpha)$, in dem der Anteil α (z. Bsp.$\alpha = 0{,}9$) der Fläche der Verteilung liegt: („totale Breite“)

$$\int_{x_0-\frac{W_x}{2}}^{x_0+\frac{W_x}{2}} |\psi(x)|^2 dx = \alpha$$

mit $\alpha > \frac{1}{2}$ gilt: $W_x \cdot W_p \geq h \cdot (2\alpha - 1)^2$

Landau, H. J. und H. O. **Pollak** (1961) „Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - II“, Bell Syst. Tech. J. 40 (65).

Unschärfe und Doppelspalt I (Bohr-Einstein Debatte 1927)



Transversalimpulsdifferenz zwischen Spalten $\approx \frac{2Ap}{l}$

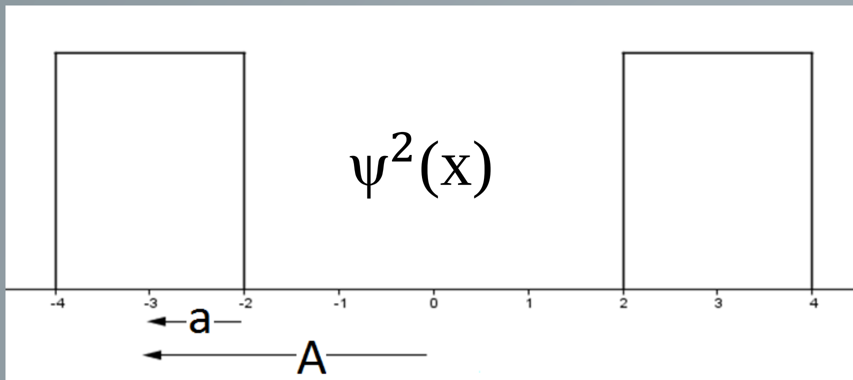
Die Ortsgenauigkeit ist dadurch begrenzt: $\delta X \geq \frac{h}{\delta p} = \frac{lh}{2Ap}$

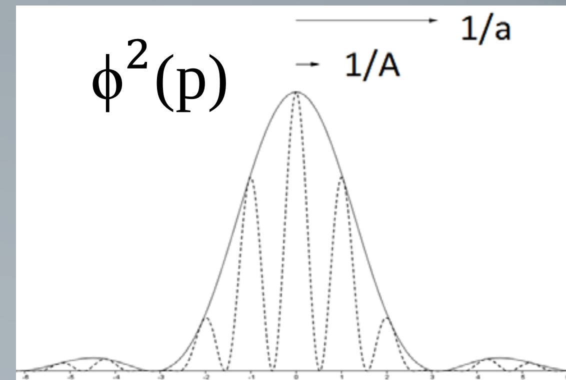
→ Interferenzstreifen nicht sichtbar

$$\delta x \sim A \qquad \delta p \sim \frac{1}{A}$$

Frage: Kann dieses (schultaugliche) Argument mit der Unschärferelation (Gl. 2) formalisiert werden?

Unschärfe und Doppelspalt II





Standardabweichung: $\Delta x \sim A$ $\Delta p = \infty$

„totale Breite“: $W_x \sim A$ $W_p(\alpha) \sim {}^1/_a$

Gesucht wird eine Kenngröße, die auf die „Feinstruktur“ (1/A) sensitiv ist!

<u>Zwei Arten</u> von Unschärfe bzw. Wahrscheinlichkeitsaussagen:

1. Aus Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Messwerte schließen
2. Aus Messwerten auf die zugrunde liegende Verteilung schließen

w_p: Das kleinste Intervall, um das die Verteilung verschoben werden kann, um von der ursprünglichen unterschieden werden zu können („Translationsbreite“)

$$W_x \cdot w_p \approx h$$

Uffink, Jos und Jan **Hilgevoord** (1985) Found. of Phys. Vol. 15 No. 9, 925-944.

Energie-Zeitunschärfe sind doch konzeptionell verschieden, oder…?

$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$ (Typische Anwendung: Energie u. Lebensdauer)

Da es in der QM keinen „Zeitoperator“ gibt, kann diese Gl. nicht aus $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|$ hergeleitet werden.

Hilgevoord (1996): Dabei handelt es sich um einen Kategorienfehler:

- Es gibt keinen „Zeitoperator“, aber auch keinen „Raumoperator“.
- Nach dem Vorbild der „Translationsbreite“ können gleichwertige UR auch für Zeit- und Energieskalen hergeleitet werden…

Hilgevoord, Jan (1996) “The uncertainty principle for energy and time”, Am. J. Phys. 64(12) 1451-1456.

Zusammenfassung und Fazit

- **Die „traditionelle Lesart“ der Unschärferelation muss revidiert werden:**
  - Die Robertson Beziehung $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|$ ist keine allgemeine Formulierung der Unschärferelation
  - Präparation und Störungsvorstellungen müssen unterschieden werden – haben aber beide ein Recht
  - Die Standardabweichung ist nicht immer ein geeignetes Streumaß
- **Didaktische Implikationen**
  - Der Mangel an „mathematischem Apparat“ ist weniger folgenreich als oft angenommen
  - Semi-klassische Herleitungen sind besser als ihr Ruf!
  - Die Unschärferelation in der Form $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ zu zitieren macht dann allerdings keinen Sinn…

O. Passon & J. Grebe-Ellis (2015) „Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?“, Praxis Naturwissenschaften – Physik in der Schule 64(7) 44-49.