

# **Ist die Quantenmechanik deterministisch?**

**Eine Einführung in die de Broglie-Bohm Theorie**

Oliver Passon

Bergische Universität Wuppertal

Physik und ihre Didaktik

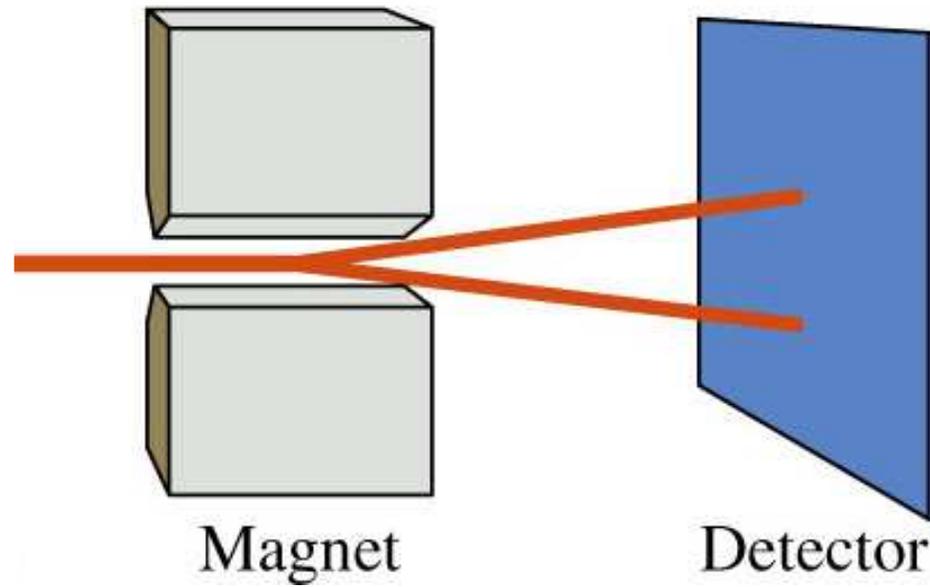
## John Bell über die de Broglie-Bohm Theorie:

“This theory is **equivalent experimentally** to ordinary nonrelativistic quantum mechanics – and it is **rational, it is clear, and it is exact, and it agrees with experiment**, and I think it is a **scandal** that students are not told about it. Why are they not told about it? I have to guess here there are mainly historical reasons, but one of the reasons is surely that **this theory takes almost all the *romance* out of quantum mechanics**. This scheme is a living **counterexample** to most of the things that we tell the public on the great lessons of twentieth century science.”

in: J. S. Bell, *Towards An Exact Quantum Mechanics, Essays in honor of J. Schwinger 70th birthday*, Ed. S. Deser and R. J. Finkelstein, World Scientific, Singapore 1989

---

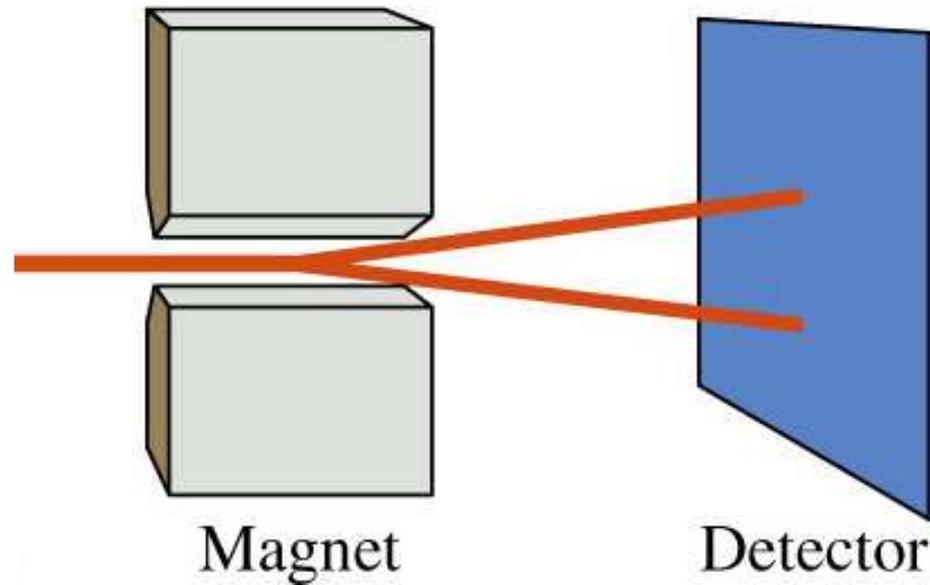
# Motivation: das Messproblem der QM



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) \otimes \Phi_0$$

---

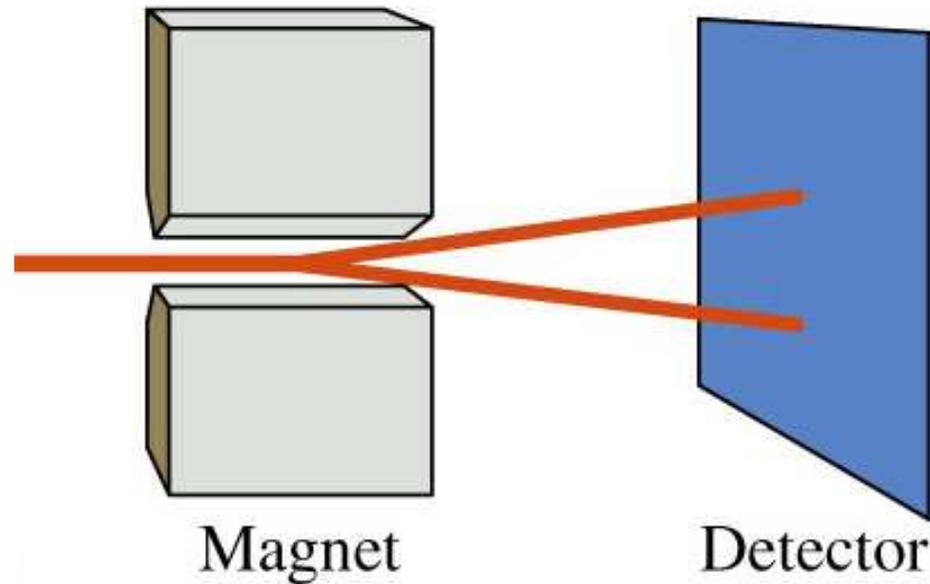
## Motivation: das Messproblem der QM



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) \otimes \Phi_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \otimes \Phi_1 + \psi_2 \otimes \Phi_2)$$

---

## Motivation: das Messproblem der QM



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) \otimes \Phi_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \otimes \Phi_1 + \psi_2 \otimes \Phi_2) \rightarrow \Phi_1 \text{ oder } \Phi_2$$

Am Ende der unitären Zeitentwicklung steht eine Überlagerung und **kein** Eigenzustand

---

# Formulierung des Problems

---

## Formulierung des Problems

Das **Messproblem** kann etwa so formuliert werden (Tim Maudlin, “Three measurement problems”, Topoi 14, 1995, 7-15.):

Folgende **drei Aussagen** können – obwohl einzeln plausibel – nicht gleichzeitig richtig sein:

---

## Formulierung des Problems

Das **Messproblem** kann etwa so formuliert werden (Tim Maudlin, “Three measurement problems”, Topoi 14, 1995, 7-15.):

Folgende **drei Aussagen** können – obwohl einzeln plausibel – nicht gleichzeitig richtig sein:

1. Die Wellenfunktion kodiert *alle* Eigenschaften des *individuellen* Systems
-

## Formulierung des Problems

Das **Messproblem** kann etwa so formuliert werden (Tim Maudlin, “Three measurement problems”, *Topoi* 14, 1995, 7-15.):

Folgende **drei Aussagen** können – obwohl einzeln plausibel – nicht gleichzeitig richtig sein:

1. Die Wellenfunktion kodiert *alle* Eigenschaften des *individuellen* Systems
  2. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist *immer* unitär
-

## Formulierung des Problems

Das **Messproblem** kann etwa so formuliert werden (Tim Maudlin, “Three measurement problems”, Topoi 14, 1995, 7-15.):

Folgende **drei Aussagen** können – obwohl einzeln plausibel – nicht gleichzeitig richtig sein:

1. Die Wellenfunktion kodiert *alle* Eigenschaften des *individuellen* Systems
  2. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist *immer* unitär
  3. Jede Messung hat *einen* definiten Ausgang
-

## Formulierung des Problems

Das **Messproblem** kann etwa so formuliert werden (Tim Maudlin, “Three measurement problems”, Topoi 14, 1995, 7-15.):

Folgende **drei Aussagen** können – obwohl einzeln plausibel – nicht gleichzeitig richtig sein:

1. Die Wellenfunktion kodiert *alle* Eigenschaften des *individuellen* Systems
2. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist *immer* unitär
3. Jede Messung hat *einen* definiten Ausgang

1,2  $\Rightarrow$   $\neg$  3 (z.Bsp. ist der Zustand symmetrisch bzgl. der beiden Messausgänge...)

---

## Klassifizierung der möglichen Lösungen

(Mindestens) eine der obigen Aussagen muss falsch sein. Daraus folgt eine Klassifikation der Interpretation der QM/Lösungen des Messproblems:

---

## Klassifizierung der möglichen Lösungen

(Mindestens) eine der obigen Aussagen muss falsch sein. Daraus folgt eine Klassifikation der Interpretation der QM/Lösungen des Messproblems:

- $\neg 1$  (“Vollständigkeit”): Es gibt “verborgene Variablen” bzw. die Wellenfunktion beschreibt nur *Ensemble*, bzw. die Umgebung muss klassisch beschrieben werden (“Kopenhagen”?)...
-

## Klassifizierung der möglichen Lösungen

(Mindestens) eine der obigen Aussagen muss falsch sein. Daraus folgt eine Klassifikation der Interpretation der QM/Lösungen des Messproblems:

- $\neg$  1 (“Vollständigkeit”): Es gibt “verborgene Variablen” bzw. die Wellenfunktion beschreibt nur *Ensemble*, bzw. die Umgebung muss klassisch beschrieben werden (“Kopenhagen”?)...
  - $\neg$  2 (“Unitarität”): Es gibt einen “Kollaps” der Wellenfunktion, entweder ad hoc (von Neumann 1932, “Kopenhagen”?) oder durch eine Modifikation der Schrödingergleichung (GRW 1986, etc.pp.)
-

## Klassifizierung der möglichen Lösungen

(Mindestens) eine der obigen Aussagen muss falsch sein. Daraus folgt eine Klassifikation der Interpretation der QM/Lösungen des Messproblems:

- $\neg$  1 (“Vollständigkeit”): Es gibt “verborgene Variablen” bzw. die Wellenfunktion beschreibt nur *Ensemble*, bzw. die Umgebung muss klassisch beschrieben werden (“Kopenhagen”?)...
  - $\neg$  2 (“Unitarität”): Es gibt einen “Kollaps” der Wellenfunktion, entweder ad hoc (von Neumann 1932, “Kopenhagen”?) oder durch eine Modifikation der Schrödingergleichung (GRW 1986, etc.pp.)
  - $\neg$  3 (“Definitheit”): Viele Welten, viele Geister (“many minds”)...
-

## Dekohärenz und das Messproblem

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots \\ \rho_{21} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \rho_{nn-1} & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \approx 0 & \cdots \\ \approx 0 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \approx 0 & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

---

## Dekohärenz und das Messproblem

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots \\ \rho_{21} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \rho_{nn-1} & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \approx 0 & \cdots \\ \approx 0 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \approx 0 & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Aus der **kohärenten** Überlagerung wird eine **nicht-kohärente** Überlagerung, d.h. die nicht-diagonalen Interferenzterme sind eliminiert.

---

## Dekohärenz und das Messproblem

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots \\ \rho_{21} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \rho_{nn-1} & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \approx 0 & \cdots \\ \approx 0 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \approx 0 & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Aus der **kohärenten** Überlagerung wird eine **nicht-kohärente** Überlagerung, d.h. die nicht-diagonalen Interferenzterme sind eliminiert.

Das Auftreten eines **definiten** Messergebnisses wird aber immer noch nicht erklärt.

---

## Dekohärenz und das Messproblem

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots \\ \rho_{21} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \rho_{nn-1} & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \approx 0 & \cdots \\ \approx 0 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \approx 0 & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Aus der **kohärenten** Überlagerung wird eine **nicht-kohärente** Überlagerung, d.h. die nicht-diagonalen Interferenzterme sind eliminiert.

Das Auftreten eines **definiten** Messergebnisses wird aber immer noch nicht erklärt.

**Anmerkung:** Einige Autoren der “Dekohärenz-Bibel” (Joos, Kiefer, et.al) sind Anhänger der viele-Welten Interpretation...

siehe auch: S. Adler, “Why decoherence has not solved the measurement problem”, Stud.Hist.Phil.Mod.Phys. 34 (2003) 135.

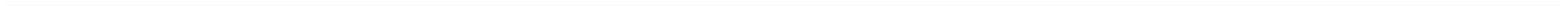
---

Die [de Broglie-Bohm Theorie](#) ist eine Theorie “verborgener” (besser: zusätzlicher) Parameter, also vom “ $\neg 1$  Typ”. Sie leugnet die “Vollständigkeit” der üblichen Beschreibung.

---

Die **de Broglie-Bohm Theorie** ist eine Theorie “verborgener” (besser: zusätzlicher) Parameter, also vom “ $\neg 1$  Typ”. Sie leugnet die “Vollständigkeit” der üblichen Beschreibung.

Was sind die zusätzlichen Variablen?



Die **de Broglie-Bohm Theorie** ist eine Theorie “verborgener” (besser: zusätzlicher) Parameter, also vom “ $\neg 1$  Typ”. Sie leugnet die “Vollständigkeit” der üblichen Beschreibung.

Was sind die zusätzlichen Variablen?

Die Teilchenorte!

$\psi$	$\rightarrow$	$(\psi, Q_i)$
Quantenmechanik	$\rightarrow$	de Broglie-Bohm Theorie

## Definition der de Broglie-Bohm Theorie

Die de Broglie-Bohm Theorie beschreibt ein System durch die  
Wellenfunktion  $\psi(q_1, \dots)$  und die  
Konfiguration im Ortsraum  $Q = (Q_1, \dots)$ .

---

# Definition der de Broglie-Bohm Theorie

Die de Broglie-Bohm Theorie beschreibt ein System durch die Wellenfunktion  $\psi(q_1, \dots)$  und die Konfiguration im Ortsraum  $Q = (Q_1, \dots)$ .

## 1. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$$

---

# Definition der de Broglie-Bohm Theorie

Die de Broglie-Bohm Theorie beschreibt ein System durch die **Wellenfunktion**  $\psi(q_1, \dots)$  und die **Konfiguration im Ortsraum**  $Q = (Q_1, \dots)$ .

## 1. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$$

2. **Führungsgleichung** (mit  $\nabla_k = \partial/\partial q_k$  und  $\psi(q, t) = R(q, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(q, t)}$ ):

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\hbar}{m_k} \frac{\Im(\nabla_k \psi)}{\psi} = \frac{\nabla_k S}{m_k}$$

---

# Definition der de Broglie-Bohm Theorie

Die de Broglie-Bohm Theorie beschreibt ein System durch die **Wellenfunktion**  $\psi(q_1, \dots)$  und die **Konfiguration im Ortsraum**  $Q = (Q_1, \dots)$ .

## 1. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$$

2. **Führungsgleichung** (mit  $\nabla_k = \partial/\partial q_k$  und  $\psi(q, t) = R(q, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(q, t)}$ ):

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\hbar}{m_k} \frac{\Im(\nabla_k \psi)}{\psi} = \frac{\nabla_k S}{m_k}$$

3. **Quantengewichtsbedingung**: Die Ortsverteilung  $\rho$  von durch  $\psi$  beschriebenen Systemen lautet:

$$\rho = |\psi|^2$$

---

## Eine kurze Geschichte der de Broglie-Bohm Theorie

- 1927 Louis de Broglie stellt “pilot-wave” Modell auf der 5. Solvay Konferenz vor.
-

## Eine kurze Geschichte der de Broglie-Bohm Theorie

- 1927 Louis de Broglie stellt “pilot-wave” Modell auf der 5. Solvay Konferenz vor.
  - 1932 J. von Neumann (*Mathematische Methoden der Quantentheorie*) gibt einen Beweis über die Unmöglichkeit von Theorien verborgener Variablen.
  - 1952 D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables* Phys.Rev., **85**, 166(I) und 180(II)
-

## Anekdotisches zur Rezeption der Bohmschen Mechanik

“Dieser schreibt mir Briefe wie ein Sektenpfaff, um mich zu bekehren – und zwar zur alten, von ihm aufgewärmten *theorie de l’onde pilote* von de Broglie (1926/27). Ich habe ihm zwar vorgeschlagen, unsere Korrespondenz vorläufig abubrechen, bis er neue Resultate zu berichten habe, das hat aber nichts geholfen, es kommen fast täglich Briefe von ihm, oft mit Strafporto (er hat offenbar einen unbewussten Wunsch, mich zu bestrafen).”

W. Pauli (an Fierz, Dezember '51)

---

## Eine kurze Geschichte der de Broglie-Bohm Theorie

- 1927 Louis de Broglie stellt “pilot-wave” Modell auf der 5. Solvay Konferenz vor.
  - 1932 J. von Neumann (*Mathematische Methoden der Quantentheorie*) gibt einen Beweis über die Unmöglichkeit von Theorien verborgener Variablen.
  - 1952 D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables* Phys.Rev., **85**, 166(I) und 180(II)
  - ≈ 1960- J.S. Bell gehört zu den wenigen einflussreichen Verfechtern der Bohm Theorie
-

## Eine kurze Geschichte der de Broglie-Bohm Theorie

- 1927 Louis de Broglie stellt “pilot-wave” Modell auf der 5. Solvay Konferenz vor.
- 1932 J. von Neumann (*Mathematische Methoden der Quantentheorie*) gibt einen Beweis über die Unmöglichkeit von Theorien verborgener Variablen.
- 1952 D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables* Phys.Rev., **85**, 166(I) und 180(II)
- $\approx$  1960- J.S. Bell gehört zu den wenigen einflussreichen Verfechtern der Bohm Theorie
- $\approx$  1990- Wiedererwachendes Interesse an der Bohm Theorie (D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi, A. Valentini, J. Cushing, G. Grübl, ...)  $\rightarrow$  Schulenburg



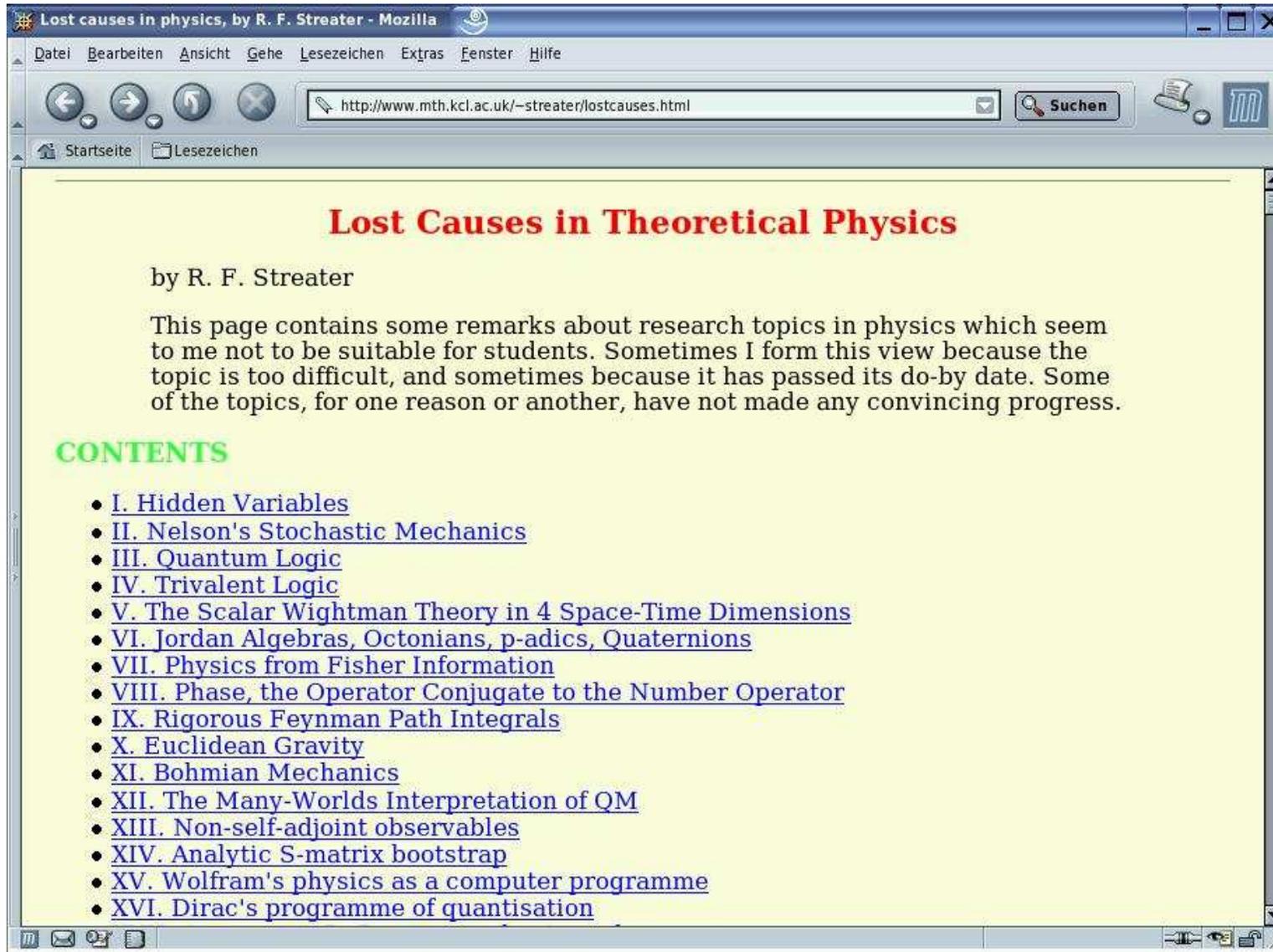
## Die vielen Namen der de Broglie-Bohm Theorie

- Führungsfeldtheorie (de Broglie, Bell)
- Theorie verborgener Variablen (Bohm '52)
- Kausale Interpretation der QM (Bohm  $\approx$  1953-)
- Ontologische Interpretation der QM (Bohm  $\approx$  1980-)
- Bohmsche Mechanik (Dürr, Goldstein, Zanghi)
- Bell Mechanik (Hileys Vorschlag für die Theorie, die DGZ "Bohmsche Mechanik" nennen)
- de Broglie-Bohm Theorie, de Broglie-Bohm pilot-wave theory,...

**Streitfragen:** Status der Wellenfunktion, des "Quantenpotentials", ...

---

# Polemik



Lost causes in physics, by R. F. Streater - Mozilla

File Bearbeiten Ansicht Gehe Lesezeichen Extras Fenster Hilfe

http://www.mth.kcl.ac.uk/~streater/lostcauses.html Suchen

Startseite Lesezeichen

## Lost Causes in Theoretical Physics

by R. F. Streater

This page contains some remarks about research topics in physics which seem to me not to be suitable for students. Sometimes I form this view because the topic is too difficult, and sometimes because it has passed its do-by date. Some of the topics, for one reason or another, have not made any convincing progress.

### CONTENTS

- [I. Hidden Variables](#)
- [II. Nelson's Stochastic Mechanics](#)
- [III. Quantum Logic](#)
- [IV. Trivalent Logic](#)
- [V. The Scalar Wightman Theory in 4 Space-Time Dimensions](#)
- [VI. Jordan Algebras, Octonians, p-adics, Quaternions](#)
- [VII. Physics from Fisher Information](#)
- [VIII. Phase, the Operator Conjugate to the Number Operator](#)
- [IX. Rigorous Feynman Path Integrals](#)
- [X. Euclidean Gravity](#)
- [XI. Bohmian Mechanics](#)
- [XII. The Many-Worlds Interpretation of QM](#)
- [XIII. Non-self-adjoint observables](#)
- [XIV. Analytic S-matrix bootstrap](#)
- [XV. Wolfram's physics as a computer programme](#)
- [XVI. Dirac's programme of quantisation](#)

## Quanten-Pornographie

Im Mikrokosmos gelten andere Gesetze. Daß sie etwas mit der Alltagsrealität zu tun haben, gilt als anstößig

VON BJÖRN SCHWENKER

Die materielle Welt besteht aus Atomen, und diese wiederum bestehen aus noch kleineren Objekten, etwa Elektronen – so steht es in jedem Schulbuch. Stühle, Tische, Steine sind in der Realität mehr oder weniger wohlgeordnete Ansammlungen winziger Teilchen.

In der Realität? Tatsächlich war selbst die Existenz der Atome noch um 1900 stark umstritten; erst eine der drei Arbeiten Albert Einsteins in seinem Wunderjahr 1905 verhalf der Idee endgültig zum Durchbruch. Doch zwanzig Jahre später war wieder alles ganz anders. Zwar zweifelte niemand mehr, daß die Materie letztlich aus diskreten Objekten besteht, wohl aber daran, daß sich diese verhielten wie verkleinerte Fußbälle. Es stellte sich heraus, daß die vertrauten mechanischen Gesetze in der Mikrowelt nicht mehr gelten. Sie müssen dort durch die Gesetze der Quantenmechanik ersetzt werden. Dieser Quantengesetze, etwa jene, die beim sogenannten Doppelspaltexperiment zum Zuge kommen (siehe „Paradoxes Torwandschießen“), brachten viele Physiker dazu, sich



Unbeugsam: David Bohm 1949

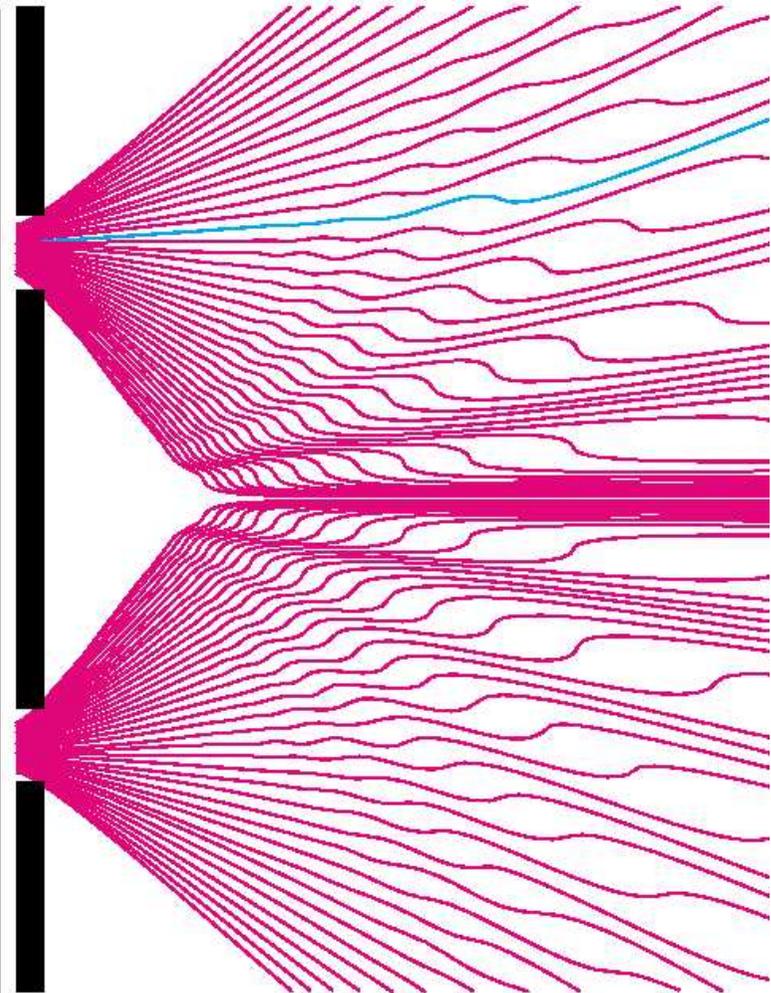
### Der Unbequeme

Der 1917 in Pennsylvania geborene David Bohm gilt als eines der größten physikalischen Talente seiner Generation. Dennoch eckte er an – und nicht erst mit seiner Interpretation der Quantenmechanik. 1949, als Bohm Assistenz-Professor an der Universität Princeton war, zitierte man ihn vor das berüchtigte Komitee für „unamerikanische Aktivitäten“, das ihn verdächtigte, ein kommunistischer Agent gewesen zu sein. Bohm verweigerte die Aussage, woraufhin man ihn zu einer Haftstrafe verurteilte. 1951 wurde er freigesprochen, doch die Universität Princeton verbot ihm, jemals wieder den Campus zu betreten. In seiner Heimat gab es für Bohm keine Chance mehr auf eine wissenschaftliche Karriere.

Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen ausweiten läßt, wie man sie in Teilchenbeschleunigern beobachtet. Dürr glaubt fest daran, daß die Bohmsche Interpretation die einzig richtige ist: „Sie können jede Frage an die Theorie stellen und kriegen auf jede Frage eine Antwort.“ Den Bohmschen Bahnen sei Dank – alle *Mysterien* der Quantenwelt lösen sich in realer, wenn auch etwas skurriler Teilchenbahnen auf.

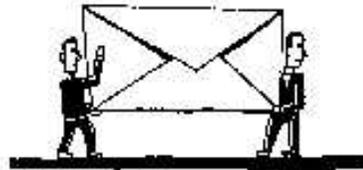
Obwohl es keine gültigen Beweise gegen Bohms Theorie gibt, galt sie lange als geradezu unerhört. Als auf einem Kongreß in den achtziger Jahren zum erstenmal die im Computer berechneten Bohmschen Teilchenbahnen des Doppelspaltexperiments öffentlich gezeigt wurden, sprang der Italiener Franco Selleri spontan auf und rief: „Dies ist die Hardcorepornographie der Quantenmechanik.“ Bei allem philosophischen Reiz einer Rückkehr zur Idee lokalisierter Teilchen – so etwas durfte es einfach nicht geben, schon gar nicht für die Verfechter der Kopenhagener Interpretation.

Die aber sei eine Theorie, die „nichts erklärt“, findet Detlef Dürr.



Nach der Bohmschen Theorie laufen die Elektronen hinter einem Doppelspalt (schwarz) auf

## LESERBRIEFE



menhang denn sonst, wenn nicht mit der Gedenkveranstaltung in Auschwitz, hätte der Skandal erwähnt werden sollen? Wenn die Rechtsextremisten bekämpft werden sollen, muß man sie in aller Öffentlichkeit bei den Hörnern packen und den Ungeist ihrer Ideologie klar benennen.

*Karl-Ludwig Keller, Bonn*

### Umgehen

WISSENSCHAFT Zu „Quanten-Pornographie“ von Björn Schwentker (23. Januar):

Ich bin mit dem Wissenschaftsteil der F.A.Z. und der F.A.S. sehr zu-

frieden. Dieser Artikel macht da eine Ausnahme. Er bläst ein marginales Verständnisproblem einiger Mathematiker oder Mathematischer Physiker zu einem Problem der Quantenphysik auf. Werner Heisenberg, der Entdecker der Quantenmechanik, hat 1925 zwei Prinzipien der Physik eingeführt: 1. Nur beobachtbare Dinge sind Gegenstand der Physik. 2. Unschärferelation: Ort und Impuls eines Teilchens sind nicht gleichzeitig beobachtbar. Damit sind die im Artikel abgebildeten Bahnen physikalisch sinnlos. Wenn ein Mathematiker oder Herr David Bohm meint, hier die Unschärferelation umgehen zu können, ist das vielleicht für ihn lohnend, für die Physik aber irrelevant.

*Prof. Dr. Konrad Kleinknecht, Institut für Physik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz*

Vo

Feur  
Mon  
Janu  
Dan  
gen  
mit  
statt  
hat,  
liste  
uner  
sche  
sie ;  
prof  
Mar

Leser  
mein  
Main.  
litik  
Um r  
licher  
zwun  
fe so  
wir si

# Definition der de Broglie-Bohm Theorie

Die de Broglie-Bohm Theorie beschreibt ein System durch die **Wellenfunktion**  $\psi(q_1, \dots)$  und die **Konfiguration im Ortsraum**  $Q = (Q_1, \dots)$ .

## 1. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$$

2. **Führungsgleichung** (mit  $\nabla_k = \partial/\partial q_k$  und  $\psi(q, t) = R(q, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(q, t)}$ ):

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\hbar}{m_k} \frac{\Im(\nabla_k \psi)}{\psi} = \frac{\nabla_k S}{m_k}$$

3. **Quantengewichtsbedingung**: Die Ortsverteilung  $\rho$  von durch  $\psi$  beschriebenen Systemen lautet:

$$\rho = |\psi|^2$$

---

## Motivation der “Führungsgleichung”

**Klassisch:** Zusammenhang zwischen **Strom** ( $j$ ), **Dichte** ( $\rho$ ) und **Geschwindigkeit** ( $v = dx/dt$ ):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{j}{\rho} \tag{1}$$

---

## Motivation der “Führungsgleichung”

**Klassisch:** Zusammenhang zwischen **Strom** ( $j$ ), **Dichte** ( $\rho$ ) und **Geschwindigkeit** ( $v = dx/dt$ ):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{j}{\rho} \quad (2)$$

**Quantenmechanisch:**

$$\rho = |\psi|^2 \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstrom}$$

$$\psi = Re^{\frac{i}{\hbar}S} \quad \text{Wellenfunktion in Polardarstellung}$$

---

## Motivation der “Führungsgleichung”

**Klassisch:** Zusammenhang zwischen **Strom** ( $j$ ), **Dichte** ( $\rho$ ) und **Geschwindigkeit** ( $v = dx/dt$ ):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{j}{\rho} \quad (3)$$

**Quantenmechanisch:**

$$\rho = |\psi|^2 \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstrom}$$

$$\psi = Re^{iS/\hbar} \quad \text{Wellenfunktion in Polardarstellung}$$

Einsetzen in Gl.(3) liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\nabla S}{m} \quad \text{“Führungsgleichung” der de Broglie-Bohm Theorie}$$

---

## Führungsgleichung für Teilchen mit Spin

Um Teilchen mit Spin zu beschreiben, muss lediglich der Strom modifiziert werden

$$\mathbf{j} = \sum_a \left( \frac{\hbar}{2mi} (\psi_a^* \nabla \psi_a - \psi_a \nabla \psi_a^*) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \psi_a^* \psi_a \right)$$

Die Führungsgleichung lautet entsprechend:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{j}{\rho}$$

---

# Motivation der Quantengleichgewichtsbedingung

---

## Motivation der Quantengleichgewichtsbedingung

Die Begründung der Quantengleichgewichtsbedingung ist ein subtiler Punkt der de Broglie-Bohm Theorie.

---

## Motivation der Quantengleichgewichtsbedingung

Die Begründung der Quantengleichgewichtsbedingung ist ein subtiler Punkt der de Broglie-Bohm Theorie.

- **Allerdings:** Die Kontinuitätsgleichung stellt sicher, dass ein System quantengleichverteilt **bleibt**, wenn es einmal quantengleichverteilt **war** ( $\rightarrow$  identische Vorhersagen wie QM).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho v = 0 \quad (4)$$

---

## Motivation der Quantengleichgewichtsbedingung

Die Begründung der Quantengleichgewichtsbedingung ist ein subtiler Punkt der de Broglie-Bohm Theorie.

- **Allerdings:** Die Kontinuitätsgleichung stellt sicher, dass ein System quantengleichverteilt **bleibt**, wenn es einmal quantengleichverteilt **war** ( $\rightarrow$  identische Vorhersagen wie QM).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho v = 0 \quad (5)$$

- Valentini: dynamische Erklärung der Quantengleichgewichtsbedingung (Phys. Lett. A 156, No.1-2, (1991) 5. und A 158, No.1-2, (1991) 1.)
  - Dürr et al.: “typicality” Argument (J. of Stat. Phys., **67** (1992) 843)
-

# Das Quantenpotential

---

# Das Quantenpotential

Die Phase der Wellenfunktion  $S$  erfüllt eine "Hamilton-Jacobi-artige" Gleichung:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V \underbrace{\frac{\hbar^2 \nabla^2 R}{2mR}}_{=U}$$
$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\nabla(V + U) \quad \text{falls: } v = \frac{\nabla S}{m}$$

---

## Das Quantenpotential

Die Phase der Wellenfunktion  $S$  erfüllt eine “Hamilton-Jacobi-artige” Gleichung:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V \underbrace{\frac{\hbar^2 \nabla^2 R}{2mR}}_{=U}$$
$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\nabla(V + U) \quad \text{falls: } v = \frac{\nabla S}{m}$$

Einige Autoren (Bohm, Hiley, Holland, ...) sehen im Quantenpotential  $U$  die ganze Neuartigkeit der deBroglie-Bohm Theorie ausgedrückt. ( $\rightarrow$  “aktive” Information, “eingefaltete” Ordnung, ...)

---

## Das Quantenpotential

Die Phase der Wellenfunktion  $S$  erfüllt eine “Hamilton-Jacobi-artige” Gleichung:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V \underbrace{\frac{\hbar^2 \nabla^2 R}{2mR}}_{=U}$$
$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\nabla(V + U) \quad \text{falls:} \quad v = \frac{\nabla S}{m}$$

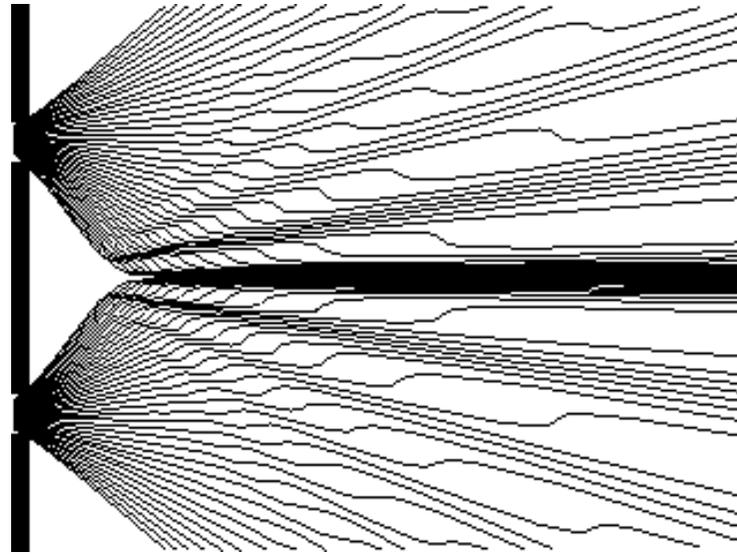
Einige Autoren (Bohm, Hiley, Holland, ...) sehen im Quantenpotential  $U$  die ganze Neuartigkeit der deBroglie-Bohm Theorie ausgedrückt. ( $\rightarrow$  “aktive” Information, “eingefaltete” Ordnung, ...)

Diese “klassische” Formulierung ist jedoch irreführend. In der deBroglie-Bohm Theorie sind Ort und Geschwindigkeit nicht unabhängig. Die echte Neuartigkeit der deBroglie-Bohm Theorie wird dadurch eher verschleiert.

---

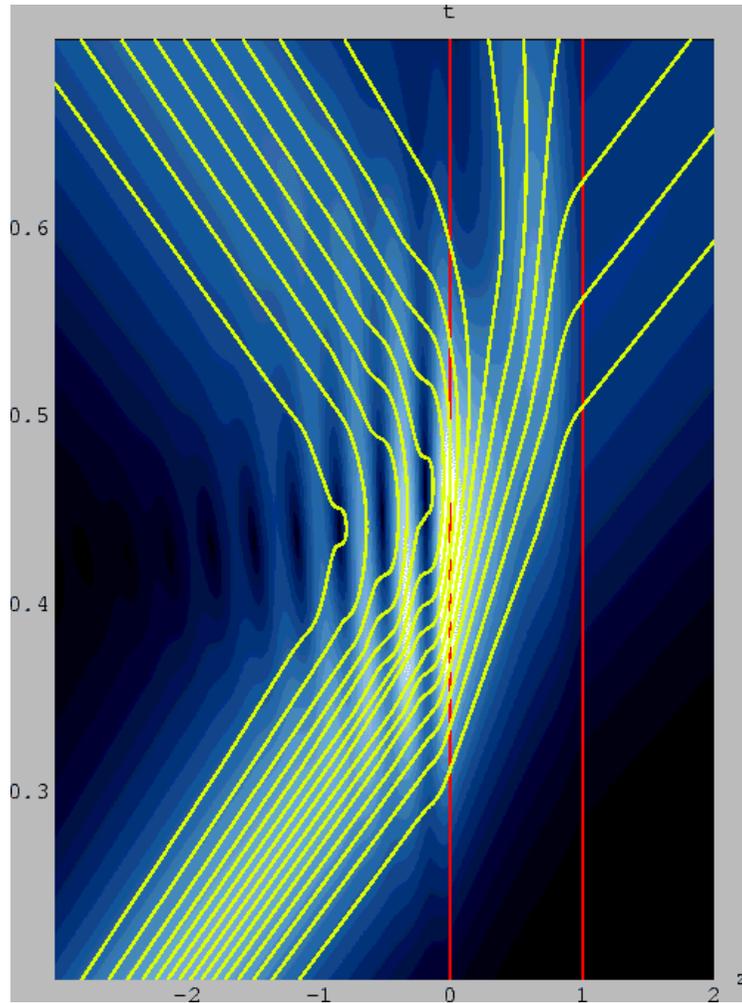
## Wie sehen die Teilchen-Bahnen eigentlich aus?

C. Philippidis, C. Dewdney and  
B. J. Hiley, *Quantum Interference  
and the Quantum Potential*, II  
Nuovo Cimento 52B (1979) 15.



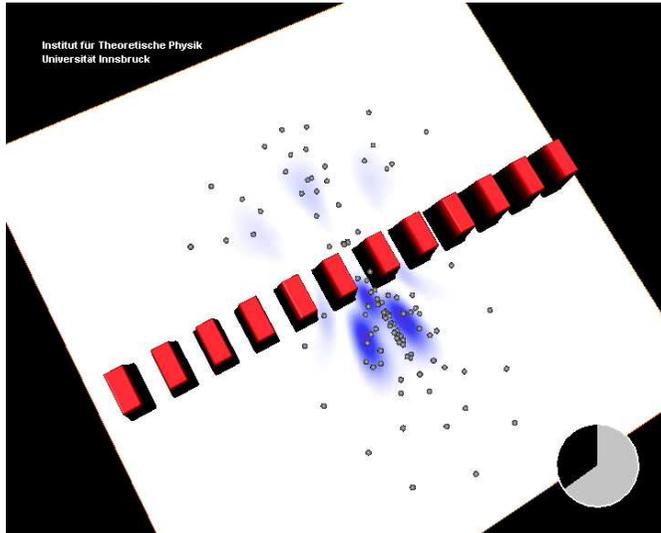
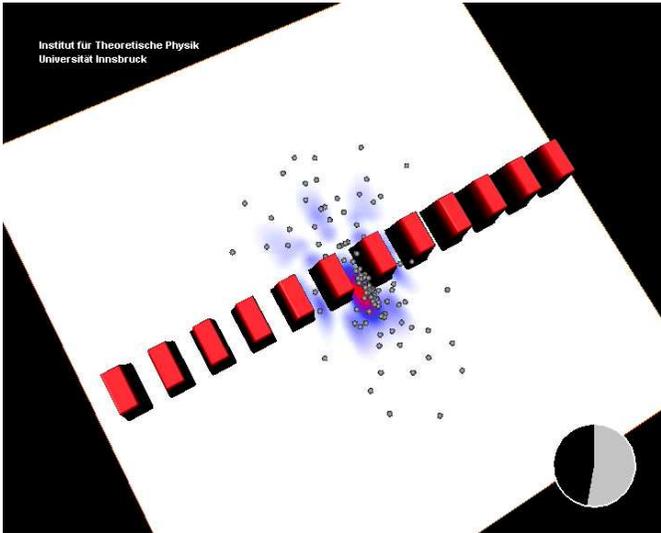
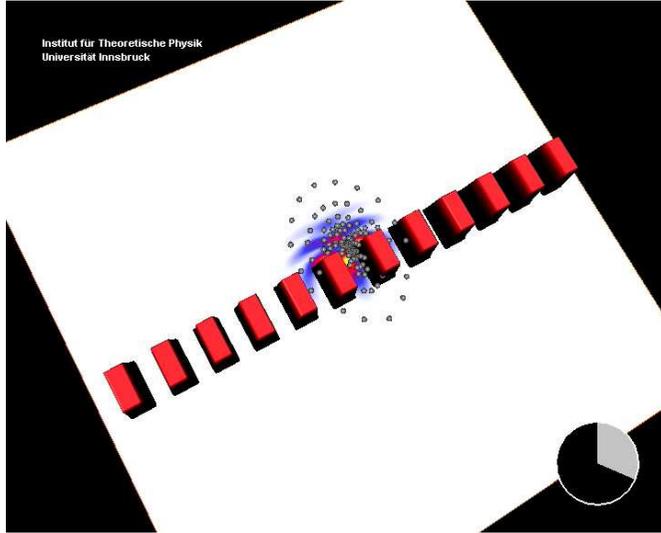
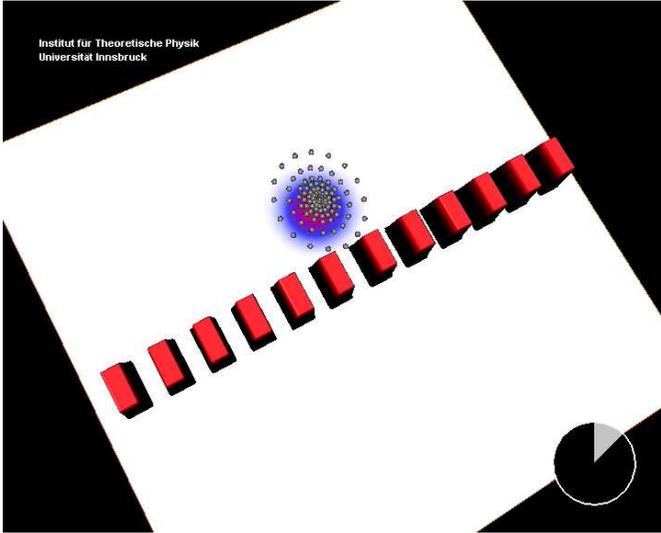
- Die Bahnen sind vollkommen unklassisch!
- Die Aussage, dass angesichts der Interferenz am Doppelspalt unmöglich das Teilchenbild aufrechterhalten werden kann, ist schlichtweg falsch!

## Trajektorien beim Tunneleffekt



Bahnen beim 1-dim Tunneleffekt  
(Die ersten Bahnen durchdringen die  
Barriere. Ihre Geschwindigkeit ist her-  
abgesetzt.)

# Beugung am Gitter



Mit freundlicher Genehmigung von Sabine Kreidl (Uni Innsbruck)

## Merkmale der de Broglie-Bohm Theorie (alphabetische Reihenfolge)

---

## Merkmale der de Broglie-Bohm Theorie (alphabetische Reihenfolge)

- Determinismus

- Die Zeitentwicklung jedes Systems ist durch  $\psi$  und die Anfangsorte vollständig festgelegt.
  - Aufgrund von Quantengleichgewichtsbedingung bleibt eine “epistemische” Unbestimmtheit bestehen (identischer deskriptiver Gehalt wie die übliche QM)
-

# Merkmale der de Broglie-Bohm Theorie (alphabetische Reihenfolge)

- Determinismus

- Die Zeitentwicklung jedes Systems ist durch  $\psi$  und die Anfangsorte vollständig festgelegt.
- Aufgrund von Quantengleichgewichtsbedingung bleibt eine “epistemische” Unbestimmtheit bestehen (identischer deskriptiver Gehalt wie die übliche QM)

- “Komplementarität” überflüssig

Ein z.B. Elektron hat Wellen **und** Teilcheneigenschaften, da es durch eine “Welle” ( $\psi$ ) **und** eine Teilchenkoordinate beschrieben wird.

---

# Merkmale der de Broglie-Bohm Theorie (alphabetische Reihenfolge)

- **Determinismus**

- Die Zeitentwicklung jedes Systems ist durch  $\psi$  und die Anfangsorte vollständig festgelegt.
- Aufgrund von Quantengleichgewichtsbedingung bleibt eine “epistemische” Unbestimmtheit bestehen (identischer deskriptiver Gehalt wie die übliche QM)

- **“Komplementarität” überflüssig**

Ein z.B. Elektron hat Wellen **und** Teilcheneigenschaften, da es durch eine “Welle” ( $\psi$ ) **und** eine Teilchenkoordinate beschrieben wird.

- **Messung**

Messungen können wie gewöhnliche Wechselwirkungen behandelt werden.

---

# Merkmale der de Broglie-Bohm Theorie (alphabetische Reihenfolge)

- **Determinismus**

- Die Zeitentwicklung jedes Systems ist durch  $\psi$  und die Anfangsorte vollständig festgelegt.
- Aufgrund von Quantengleichgewichtsbedingung bleibt eine “epistemische” Unbestimmtheit bestehen (identischer deskriptiver Gehalt wie die übliche QM)

- **“Komplementarität” überflüssig**

Ein z.B. Elektron hat Wellen **und** Teilcheneigenschaften, da es durch eine “Welle” ( $\psi$ ) **und** eine Teilchenkoordinate beschrieben wird.

- **Messung**

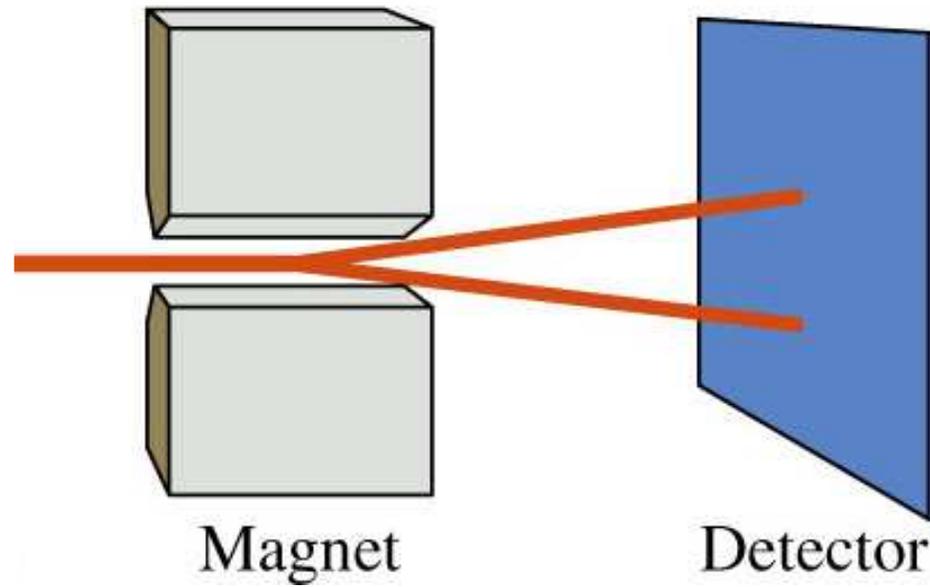
Messungen können wie gewöhnliche Wechselwirkungen behandelt werden.

- **Nichtlokalität**

Die Führungsgleichung koppelt i.allg. die Bewegung jedes Teilchens an die Orte aller anderen Teilchen. Sie faktorisiert jedoch, falls das Mehrteilchensystem nicht verschränkt ist.

---

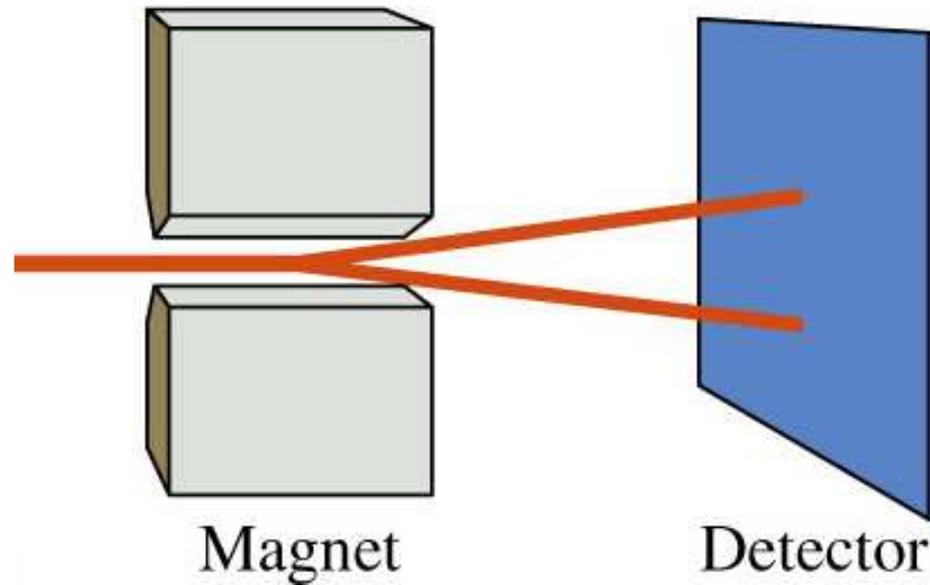
# Wie die de Broglie-Bohm Theorie das Messproblem löst



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \text{ und } |\downarrow\rangle)$$

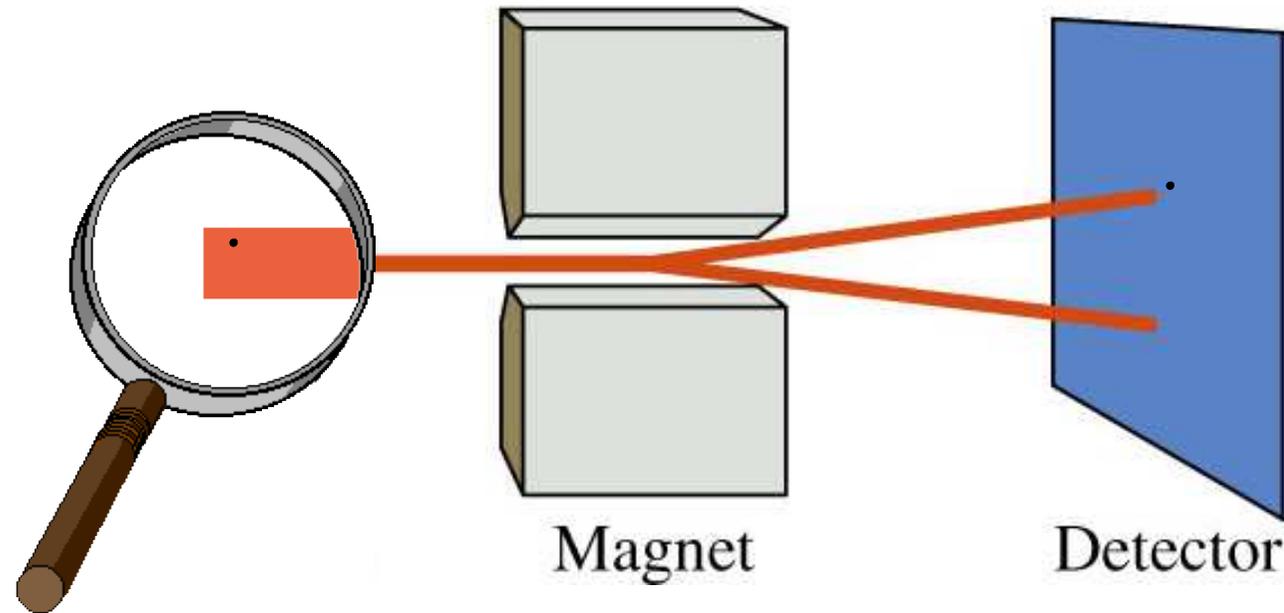
---

# Wie die de Broglie-Bohm Theorie das Messproblem löst



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \text{ und } |\downarrow\rangle) \xrightarrow{\text{Messung}} |\uparrow\rangle \text{ oder } |\downarrow\rangle$$

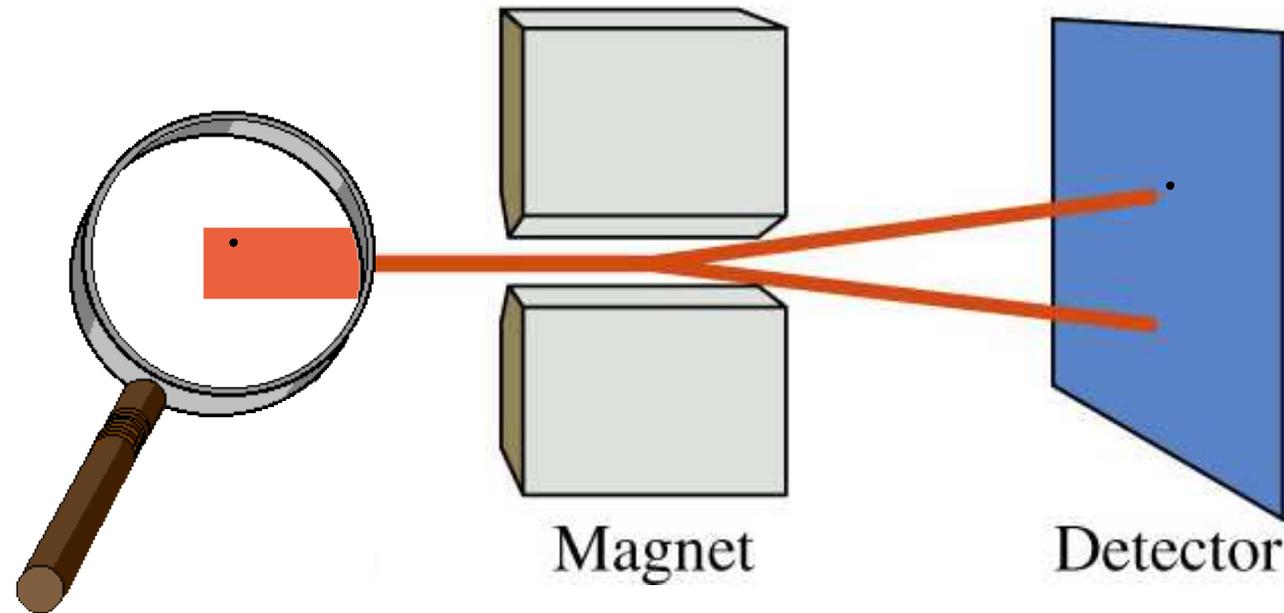
# Wie die de Broglie-Bohm Theorie das Messproblem löst



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \text{ und } |\downarrow\rangle) \xrightarrow{\text{Messung}} |\uparrow\rangle \text{ oder } |\downarrow\rangle$$

Bohm:  $Q_i \rightarrow$  oberer oder unterer Zweig, "effektiver Kollaps"

# Wie die de Broglie-Bohm Theorie das Messproblem löst



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \text{ und } |\downarrow\rangle) \xrightarrow{\text{Messung}} |\uparrow\rangle \text{ oder } |\downarrow\rangle$$

Bohm:  $Q_i \rightarrow$  oberer oder unterer Zweig, "effektiver Kollaps"

**Nebenbemerkung:** Der Anfangsort des Teilchens entscheidet über den Ausgang einer "Spinmessung" ( $\rightarrow$  Kontextualität)

---

# Einstein-Podolsky-Rosen Experiment



spin singlet state: 
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

---

# Einstein-Podolsky-Rosen Experiment



spin singlet state: 
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

Messungen an (**raumartigen**) Objekten sind streng korreliert:  $P(\uparrow, i | \uparrow, j) = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_{ij}}{2} \right)$   
( $\rightarrow$  "nicht-Lokalität", "nicht-Separabilität")

---

# Einstein-Podolsky-Rosen Experiment



spin singlet state: 
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

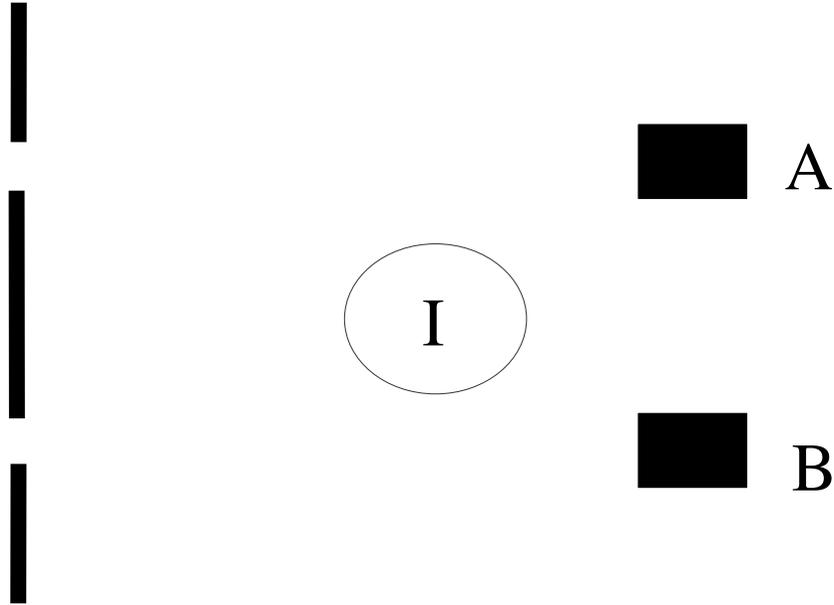
Messungen an (**raumartigen**) Objekten sind streng korreliert:  $P(\uparrow, i | \uparrow, j) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)$   
( $\rightarrow$  “**nicht-Lokalität**”, “**nicht-Separabilität**”)

bei Bohm: 
$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial S}{\partial x}(x, X_2(t)) \Big|_{x=X_1}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial S}{\partial x}(X_1(t), x) \Big|_{x=X_2}$$

Dewdney (1993), Phys.Rev.A 48 3513.

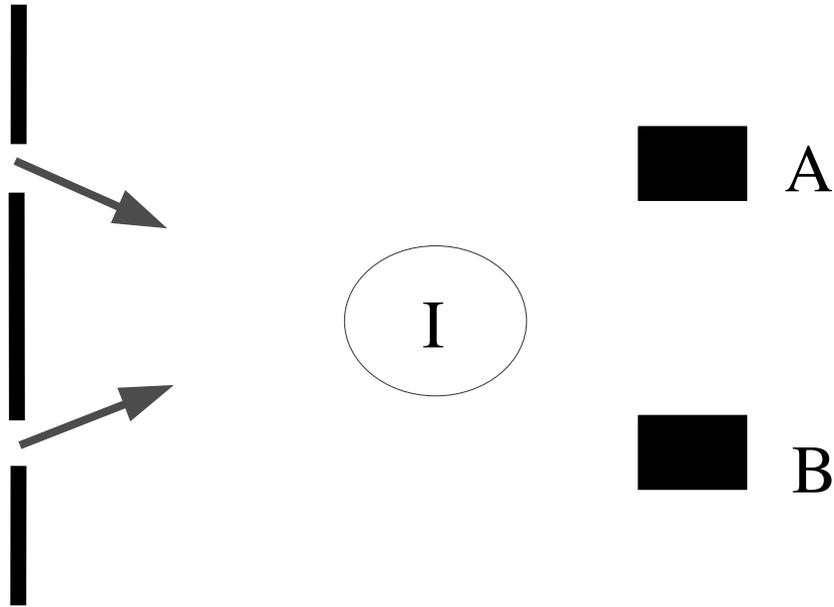
# delayed-choice-double-slit experiment



Doppelspalt Experiment mit wahlweisem Interferenzmuster/Teilchennachweis

---

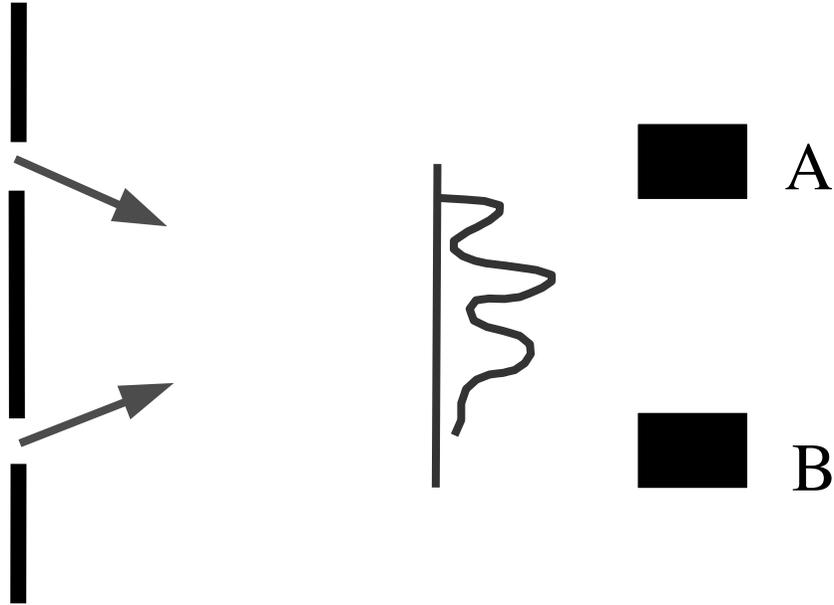
# delayed-choice-double-slit experiment



Doppelspalt Experiment mit wahlweisem Interferenzmuster/Teilchennachweis

---

## delayed-choice-double-slit experiment

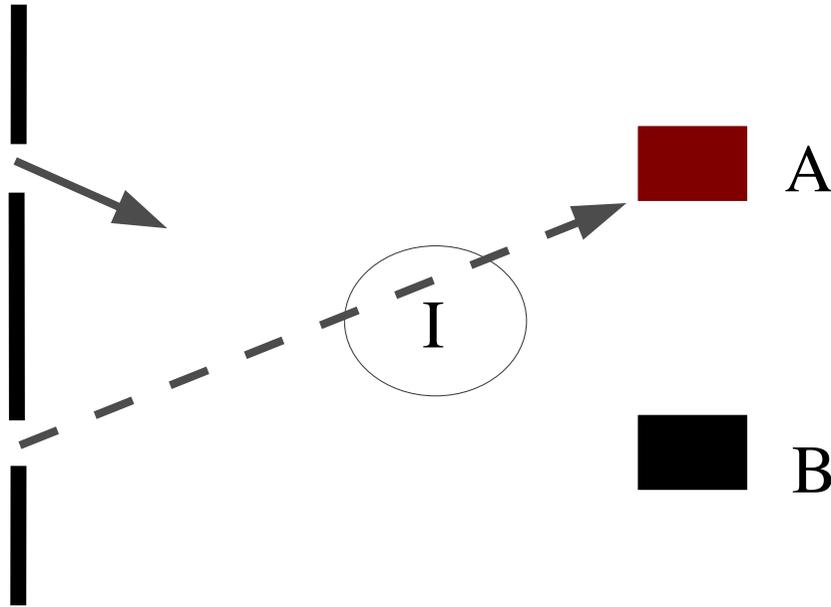


Doppelspalt Experiment mit wahlweisem Interferenzmuster/Teilchennachweis

Ein Nachweisschirm in I weist Interferenz nach.

---

## delayed-choice-double-slit experiment

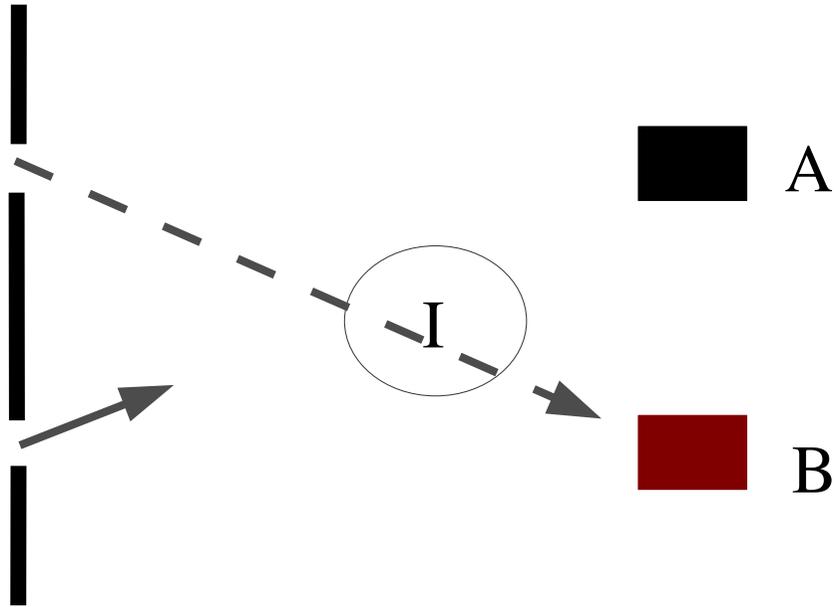


Doppelspalt Experiment mit wahlweisem Interferenzmuster/Teilchennachweis

Die Detektoren registrieren "Teilchen". Aber Achtung: die gestrichelte Linie darf (orthodox) **nicht** als Teilchenbahn gedeutet werden!

---

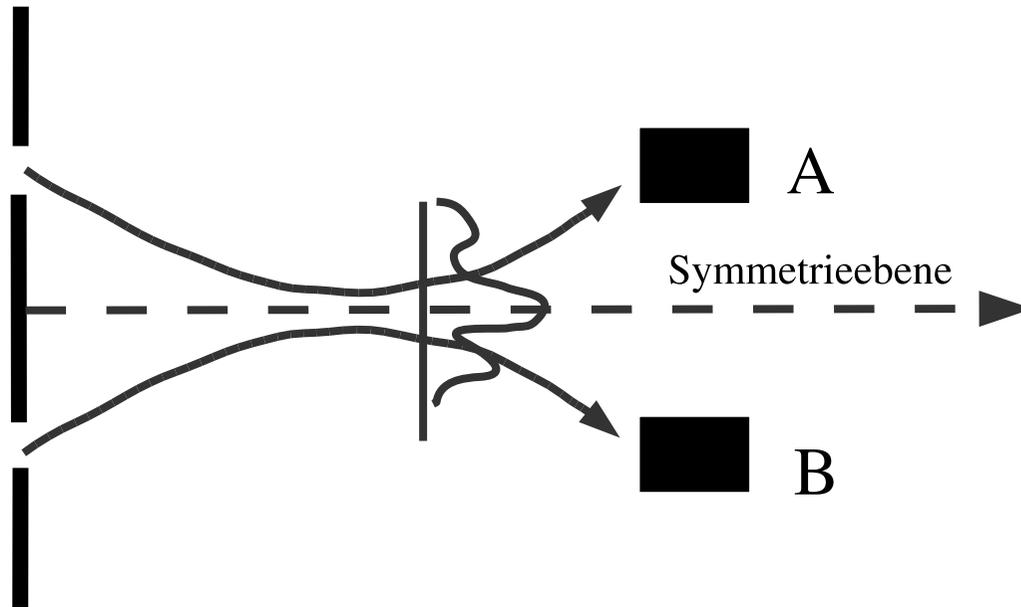
## delayed-choice-double-slit experiment



In populäre Darstellungen wird manchmal behauptet, dass im Interferenzfall das Quant durch “beide Spalte” dringt (“mit sich selbst interferiert”). Hier scheint man **nach** dem Durchgang durch die Spalte entscheiden zu können, ob dies geschehen soll!

---

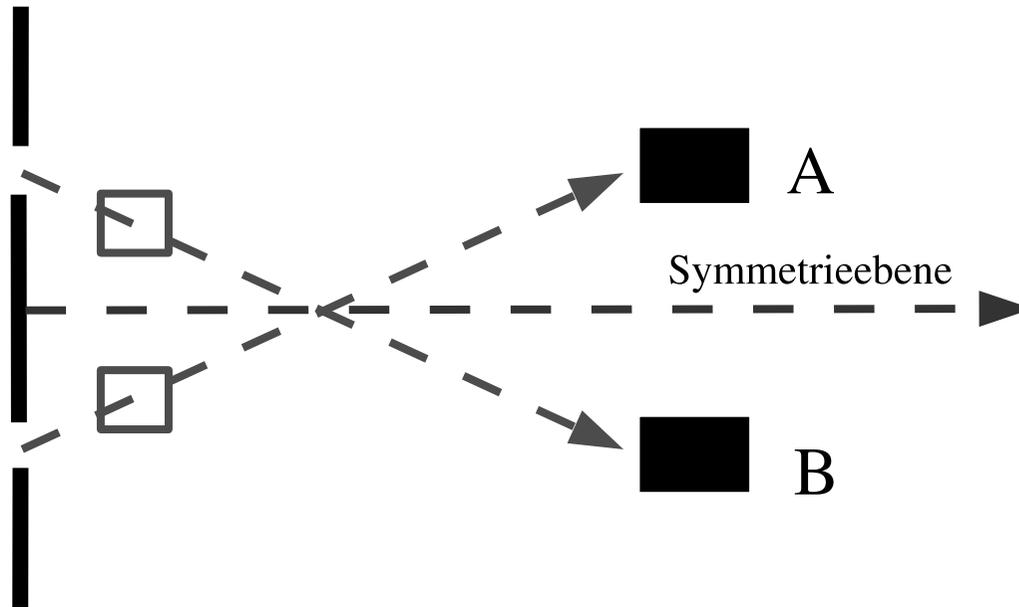
## delayed-choice-double-slit experiment



Die bohmschen Trajektorien schneiden die Symmetrieebene nicht. Ihre Bewegung hängt nicht davon ab, ob in I Interferenz nachgewiesen werden soll, oder der Teilchennachweis in den Detektoren erfolgt. Sie verletzen aber die **Impulserhaltung!**

---

## delayed-choice-double-slit experiment



Versucht man den Nachweis dieser **“Impulsverletzung”**, wird die Symmetrie gebrochen, und die Bahnen schneiden die **vormalige** Symmetrieebene...

---

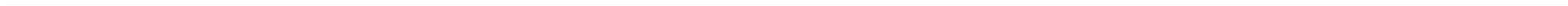
Teilcheneigenschaften (ausser dem "Ort")

---

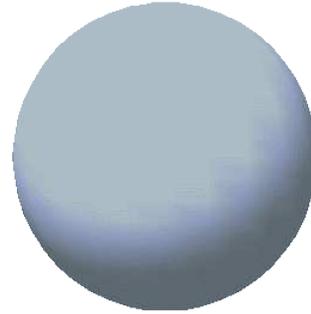
# Teilcheneigenschaften



Sieht (nach Bohm) ein Elektron also so aus?



## Teilcheneigenschaften



Sieht (nach Bohm) ein Elektron also so aus?

Hat es neben dem "wahren" Ort auch einen jederzeit definierten Impuls, Energie, Spin, Drehimpuls etc.?

---

## Teilcheneigenschaften II

Die eigentliche **Neuheit** der Quantenmechanik liegt darin, dass man den Quantenobjekten nicht alle Eigenschaften gleichzeitig zuordnen kann.

$[A, B] \neq 0 \Rightarrow A, B$  haben keine **gemeinsame** Basis aus Eigenvektoren

(Unschärferelation, Welle-Teilchen-Dualismus, EPR-Paradoxon, Bellsche Ungleichung, Quantenlogik, Messproblem,... sind eine direkte Konsequenz dieses Sachverhalts)

---

## Teilcheneigenschaften in der de Broglie-Bohm Theorie

Das Bsp. der Spinmessung zeigt, wie sein Ausgang vom **Anfangsort** des Teilchens (und der Zeitentwicklung des Pauli-Spinors) abhängt! Die "Eigenschaft" "Spin" kommt also der **Wellenfunktion** zu.

Analog kann für alle anderen "Eigenschaften" argumentiert werden (Impuls, Masse, Ladung, ...)!

**Daraus folgt:** Das "Bohm-Teilchen" hat ausser dem Ort **keine** Eigenschaft.  
Spreche: alle anderen Eigenschaften sind "kontextualisiert" (hat Ähnlichkeit mit dem Konzept der "Disposition").

---

## Teilcheneigenschaften in der de Broglie-Bohm Theorie

Nach de Broglie-Bohm ist das "Elektron" also nicht identisch mit dem Teilchen auf der Bohmschen Trajektorie, denn ein "Elektron" hat ja Ladung, Masse, Spin, etc.pp.

Das Elektron (wie jedes andere Objekt auch) wird bei de Broglie-Bohm durch das Paar (Ort, Wellenfunktion) beschrieben!

---

## Kritik an der de Broglie-Bohm Theorie

Der de Broglie-Bohm Theorie wird vorgeworfen, dass ...

- sie keine neuen Vorhersagen trifft (“Metaphysik”).
  - sie den Ortsraum auszeichnet (“Asymmetrie”).
  - sie nichtlokal ist.
  - ihre Führungsgleichung nicht eindeutig bestimmt ist.
  - ihre relativistische und quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung unmöglich ist.
  - ...
-

Was bedeutet es, eine Theorie zu verallgemeinern?

---

## Was bedeutet es, eine Theorie zu verallgemeinern?

Die Dirac-Theorie verallgemeinert die Schrödingersche Theorie.

---

## Was bedeutet es, eine Theorie zu verallgemeinern?

Die Dirac-Theorie verallgemeinert die Schrödingersche Theorie.

Die nichtrelativistische Quantenmechanik verallgemeinert die Newtonschen Mechanik.

---

## Was bedeutet es, eine Theorie zu verallgemeinern?

Die Dirac-Theorie verallgemeinert die Schrödingersche Theorie.

Die nichtrelativistische Quantenmechanik verallgemeinert die Newtonschen Mechanik.

“B verallgemeinert A” = In einem **geeigneten** Limes kann A aus B zurückgewonnen werden.

---

## Was bedeutet es, eine Theorie zu verallgemeinern?

Die Dirac-Theorie verallgemeinert die Schrödingersche Theorie.

Die nichtrelativistische Quantenmechanik verallgemeinert die Newtonschen Mechanik.

“B verallgemeinert A” = In einem **geeigneten** Limes kann A aus B zurückgewonnen werden.

**Aber:** Was ist der “geeignete Limes” und müssen alle Terme der jeweiligen Theorien in einer solchen Limesbeziehung stehen? Asymptotische Limites (Berry)? Emergenz? Reduktion? Supervenienz?

---

## Was ist eine Bohm-artige Theorie?

Forderungen an eine relativistische und quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der de Broglie-Bohm Theorie:

---

## Was ist eine Bohm-artige Theorie?

Forderungen an eine relativistische und quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der de Broglie-Bohm Theorie:

1. Die Vorhersagen der relativistischen QM/QFT werden reproduziert.
-

## Was ist eine Bohm-artige Theorie?

Forderungen an eine relativistische und quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der de Broglie-Bohm Theorie:

1. Die Vorhersagen der relativistischen QM/QFT werden reproduziert.
  2. Im nichtrelativistischen Limes wird die de Broglie-Bohm Theorie zurückgewonnen.
-

## Was ist eine Bohm-artige Theorie?

Forderungen an eine relativistische und quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der de Broglie-Bohm Theorie:

1. Die Vorhersagen der relativistischen QM/QFT werden reproduziert.
  2. Im nichtrelativistischen Limes wird die de Broglie-Bohm Theorie zurückgewonnen.
  3. Sie besitzt **Teilchenbahnen**.
  4. Sie ist **deterministisch**.
  5. ...
-

## Was ist eine Bohm-artige Theorie?

In particular we will exclude the notion of “observable” in favour of that of “beable”. The beables of the theory are those elements which might correspond to elements of reality, to things which exist. [...] Indeed observation and observers must be made out of beables.

J. S. Bell, *Beables for Quantum Field Theory*, 1986

---

## Bohm und relativistische QFT

Typ (i): “field-beables”

Bohm (1952): Bohmsche Formulierung für bosonische Felder

Kaloyerou, P. N. (1996), *Ontological interpretation of boson fields in Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal*, J. T. Cushing, A. Fine and S. Goldstein (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Struyve, W und H. Westman (2006), *A pilot-wave model for quantum field theory*, quant-ph/0602229

---

## Bohm und relativistische QFT

Typ (ii): “particle-beables”

Bohm (1953): Bohmsche Interpretation der Dirac Gleichung

Bell, J. S. (1986), *Beables for quantum field theory*, Phys. Rep. **137**, 49-54.

Dürr, D., Goldstein, S., Tumulka, R. and Zanghi, N. (2004b), *Bohmian Mechanics and Quantum Field Theory*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 090402 and quant-ph/0303156.

Dürr, D., Goldstein, S., Tumulka, R. and Zanghi, N. (2005), *Bell-Type Quantum Field Theories*, J.Phys. A38 (2005) R1 and quant-ph/0407116.

---

## Bohm und relativistische QFT

Es existiert kein überzeugendes Modell für fermionische QFT mit “field-beables” (Valentini, PhD thesis 1992, Trieste → Struyve, PhD thesis 2004, Gent) und Probleme “particle-beables” für bosonische Felder anzugeben.

3 Möglichkeiten:

- Fermionen “sind” Teilchen, Bosonen “sind” Felder
  - Bell-type QFT, stochastischer Prozess zur Teilchenerzeugung (→ Dürr et al. quant-ph/0208072, 0303156, 0407116)
  - Beable-Status für Bosonische Felder und **keinen** beable-Status für Fermionen (→ Struyve und Westman, quant-ph/0602229 )
-

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der "üblichen" Deutung vermeidet.

---

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der “üblichen” Deutung vermeidet.

Sie ist eine (von vielen) Lösungen des Messproblems der QM

---

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der “üblichen” Deutung vermeidet.

Sie ist eine (von vielen) Lösungen des Messproblems der QM

Sie bedeutet eine radikale Umdeutung des “Observablenkonzepts” (Stichwort: Kontextualisierung)

---

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der “üblichen” Deutung vermeidet.

Sie ist eine (von vielen) Lösungen des Messproblems der QM

Sie bedeutet eine radikale Umdeutung des “Observablenkonzepts” (Stichwort: Kontextualisierung)

Die de Broglie-Bohm Theorie zu kennen, schärft den Blick auf die Grundlagenprobleme der QM.

---

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der “üblichen” Deutung vermeidet.

Sie ist eine (von vielen) Lösungen des Messproblems der QM

Sie bedeutet eine radikale Umdeutung des “Observablenkonzepts” (Stichwort: Kontextualisierung)

Die de Broglie-Bohm Theorie zu kennen, schärft den Blick auf die Grundlagenprobleme der QM.

Es existieren feldtheoretische und relativistische Verallgemeinerungen der Theorie

---

## Zusammenfassung

Die de Broglie-Bohm Theorie erlaubt eine konsistente Deutung aller Quantenphänomene, die zahlreiche erkenntnistheoretischen Kapriolen der “üblichen” Deutung vermeidet.

Sie ist eine (von vielen) Lösungen des Messproblems der QM

Sie bedeutet eine radikale Umdeutung des “Observablenkonzepts” (Stichwort: Kontextualisierung)

Die de Broglie-Bohm Theorie zu kennen, schärft den Blick auf die Grundlagenprobleme der QM.

Es existieren feldtheoretische und relativistische Verallgemeinerungen der Theorie

Sie ist sehr einfach

---